



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΣΥΝΟΛΑ BIRKHOFF–JAMES  
ε–ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

Χρήστος Σ. Χωριανόπουλος

Επιβλέπων: Παναγιώτης Ψαρράκος, Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΣΥΝΟΛΑ BIRKHOFF–JAMES  
ε–ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

Χρήστος Σ. Χωριανόπουλος

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Σ. Καρανάσιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Ι. Μαρουλάς, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Γ. Καλογερόπουλος, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Α. Φελλούρης, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Ψαρράκος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Α. Αρβανιτάκης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ν. Γιαννακάκης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2011

*Στην οικογενειά μου για τη στήριξη,  
την υπομονή και την πίστη τους.*

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την άριστη συνεργασία μας, τις χρήσιμες συμβουλές του και την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της. Ευχαριστώ επίσης τον κύριο Ιωάννη Μαρουλά, Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και τον κύριο Σωτήριο Καρανάσιο, Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για την εποικοδομητική συνεργασία μας.

*Χρήστος Σ. Χωριανόπουλος*

# Περιεχόμενα

Συμβολισμοί	vi
Εισαγωγή	viii
<b>1 Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα</b>	<b>1</b>
1.1 Ορισμός του Αριθμητικού Πεδίου . . . . .	1
1.2 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου . . . . .	2
1.3 Το Αριθμητικό Πεδίο ως Τομή Δίσκων . . . . .	10
1.4 Προσέγγιση του Αριθμητικού Πεδίου . . . . .	14
1.5 Σύνορο του Αριθμητικού Πεδίου . . . . .	16
1.6 Μια Γενίκευση του Αριθμητικού Πεδίου . . . . .	19
<b>2 Ένα Αντίστροφο Πρόβλημα για το Αριθμητικό Πεδίο</b>	<b>21</b>
2.1 Το Αντίστροφο Πρόβλημα . . . . .	21
2.2 Ο Αλγόριθμος . . . . .	24
2.3 Αριθμητικά Παραδείγματα και Αξιολόγηση του Αλγόριθμου . . . . .	27
<b>3 Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας</b>	<b>31</b>
3.1 Προαπαιτούμενες Έννοιες . . . . .	31
3.2 Ένα Αριθμητικό Πεδίο για Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικούς Πίνακες . . . . .	32
3.3 Αναγκαιότητα του $B$ . . . . .	34
3.4 Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας. . . . .	38
3.5 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	43
3.6 Συνέχεια . . . . .	48
3.7 Το Σύνορο του $F_{\ \cdot\ }^{\epsilon}(A; B)$ και Ιδιοτιμές . . . . .	52

4	Σύνολα Birkhoff–James	
	ε–Ορθογωνιότητα για	
	Πολυωνυμικούς Πίνακες	62
4.1	Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων . . . . .	62
4.2	Σύνολα Birkhoff–James	
	ε–Ορθογωνιότητα για Πολυωνυμικούς	
	Πίνακες . . . . .	65
4.3	Βασικές Ιδιότητες του $W_{\ \cdot\ }^\epsilon(P(z); B)$ . . . . .	67
4.4	Σύνορο και Εσωτερικό . . . . .	71
	Βιβλιογραφία	77
	Παράρτημα: Περίληψη στην Αγγλική	81

## Συμβολισμοί

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	Τα σύνολα των πραγματικών αριθμών, διανυσμάτων και πίνακων, αντίστοιχα
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n \times m}$	Τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών, διανυσμάτων και πίνακων, αντίστοιχα
$\mathfrak{B}(X)$	Το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών του γραμμικού χώρου με νόρμα $X$
$\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$	Η νόρμα-1, η φασματική νόρμα και η νόρμα- $\infty$ , αντίστοιχα
$\ \cdot\ _F$	Η νόρμα Frobenius
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Εσωτερικό γινόμενο
$(\cdot, \cdot)$	Αόριστο εσωτερικό γινόμενο
$[\cdot, \cdot]$	Ημί-εσωτερικό γινόμενο
$\perp, \perp^\epsilon$	Ορθογωνιότητα και $\epsilon$ -ορθογωνιότητα εσωτερικού γινομένου, αντίστοιχα
$\perp_{BJ}$	Birkhoff–James ορθογωνιότητα
$\perp_{BJ}^\epsilon$	Birkhoff–James $\epsilon$ -ορθογωνιότητα
$I$	Ο ταυτοτικός τελεστής σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα
$I_n$	Ο μοναδιαίος (ταυτοτικός) πίνακας διάστασης $n$
$\sigma(A)$	Το φάσμα του τετραγωνικού πίνακα $A$
$\rho(A)$	Η φασματική ακτίνα του τετραγωνικού πίνακα $A$
$\sigma(A; B)$	Το φάσμα του πίνακα $A$ ως προς τον πίνακα $B$
$F(A)$	Το αριθμητικό πεδίο του τετραγωνικού πίνακα $A$
$r(A)$	Η αριθμητική ακτίνα του τετραγωνικού πίνακα $A$
$F(A; q)$	Το $q$ -αριθμητικό πεδίο του τετραγωνικού πίνακα $A$
$F_{[\cdot, \cdot]}(A)$	Το αριθμητικό πεδίο ημι-εσωτερικού γινομένου του τελεστή $A$
$F_{\ \cdot\ }(A; B)$	Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $A$ ως προς τον πίνακα $B$
$F_{\ \cdot\ }(A; B; q)$	Το $q$ -αριθμητικό πεδίο του πίνακα $A$ ως προς τον πίνακα $B$
$F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$	Το σύνολο Birkhoff–James $\epsilon$ -ορθογωνιότητας του πίνακα $A$ ως προς τον πίνακα $B$
$\overline{A}, A^T, A^*$	Ο συζυγής, ο ανάστροφος και ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα $A$ , αντίστοιχα
$tr(A)$	Το ίχνος του τετραγωνικού πίνακα $A$
$\det(A)$	Η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $A$
$\text{rank} A$	Ο βαθμός του πίνακα $A$
$\mathcal{D}(z_0, \rho)$	Ο κλειστός κυκλικός δίσκος με κέντρο το $z_0$ και ακτίνα $\rho$

$\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$	Ο πίνακας με διαγώνια στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_k$ και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του μηδενικά
$\text{Re}\{z\}, \text{Im}\{z\}$	Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z \in \mathbb{C}$ , αντίστοιχα
$\arg(z)$	Το όρισμα του $z \in \mathbb{C}$
$P(z)$	Πολυωνυμικός πίνακας μιγαδικής μεταβλητής $z$
$\sigma(P(z))$	Το φάσμα του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$
$W(P(z))$	Το αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$
$W_{\ \cdot\ }(P(z); B)$	Το αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα $B$
$W_{\ \cdot\ }(P(z); B; q)$	Το $q$ -αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα $B$
$W_{\ \cdot\ }^\epsilon(P(z); B)$	Το σύνολο Birkhoff–James $\epsilon$ -ορθογωνιότητας του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα $B$
$\text{Co}\{G\}$	Η κυρτή θήκη του συνόλου $G$
$\text{Int}[G]$	Το εσωτερικό του συνόλου $G$
$\partial G$	Το σύνορο του συνόλου $G$



## Εισαγωγή

Στη παρούσα διατριβή επιχειρείται η γενίκευση της έννοιας του αριθμητικού πεδίου σε πίνακες που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί. Το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα  $F(A)$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι το σύνολο των τετραγωνικών μορφών  $x^*Ax$ , όπου τα  $x$  είναι στοιχεία της μοναδιαίας σφαίρας του  $\mathbb{C}^n$ . Δηλαδή,

$$F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Το σύνολο αυτό λόγω της απλότητας του ορισμού του και του μεγάλου πλήθους των ιδιοτήτων που προκύπτουν από αυτόν, αποτελεί ένα ιδιαίτερα ελκυστικό αντικείμενο έρευνας στο χώρο της γραμμικής άλγεβρας και της ανάλυσης πινάκων. Πράγματι, γνωρίζοντας το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα, μπορούμε να λάβουμε αρκετές πληροφορίες για αυτόν τον πίνακα. Έτσι, προσέλκυσε το ενδιαφέρον σημαντικού αριθμού ερευνητών από τις περιοχές της ανάλυσης πινάκων και της θεωρίας τελεστών. Χαρακτηριστικά αναφέρονται οι Ch. Davis, C.-K. Li, C.R. Johnson, I. Spitkovsky, A. Markus και N. Bebiano. Εκατοντάδες ερευνητικές εργασίες έχουν δημοσιευθεί πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο και συνεχίζουν να δημοσιεύονται μέχρι και σήμερα. Ένας σημαντικός σταθμός στη μελέτη του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων είναι η απόδειξη της κυρτότητάς του από τους Toeplitz και Hausdorff το 1918. Συγκεκριμένα, τον Μάιο του 1918 ο Toeplitz [50] έδειξε ότι το “εξωτερικό” σύνορο του  $F(A)$  είναι κυρτή καμπύλη, ενώ το Νοέμβριο της ίδιας χρονιάς ο Hausdorff [23] απέδειξε την κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου. Έκτοτε έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία διάφορες αποδείξεις για την κυρτότητα. Πέρα από την κυρτότητα, βασικές και αξιοσημείωτες ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$  είναι ότι το  $F(A)$  είναι συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, πάντα περιέχει το φάσμα του πίνακα  $A$  (δηλαδή,  $\sigma(A) \subseteq F(A)$ ) και ότι παραμένει αναλλοίωτο κάτω από ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας (δηλαδή,  $F(U^*AU) = F(A)$ , όπου  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ορθομοναδιαίος).

Παράλληλα με την έννοια του αριθμητικού πεδίου αναπτύχθηκε και αυτή της αριθμητικής ακτίνας  $r(A)$ , δηλαδή του μέγιστου μέτρου στοιχείου του αριθμητικού πεδίου,  $r(A) = \{\max |z| : z \in F(A)\}$ . Και η αριθμητική ακτίνα με τη σειρά της συγκέντρωσε τα βλέμματα αρκετών ερευνητών, κυρίως λόγω των αριθμητικών εφαρμογών που παρουσιάζει στη μελέτη της σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων κάνοντας χρήση της ιδιότητας των δυνάμεων της αριθμητικής ακτίνας (δηλαδή,  $r(A^n) \leq r(A)^n$ ). Ενδεικτικά αναφέρουμε τον M. Eiermann [15] και τον G.A. Watson [54] ο οποίος ασχολήθηκε με την κατασκευή αλγορίθμων για τον υπολογισμό της.

Το 2008, ο F. Uhlig έθεσε ένα αντίστροφο πρόβλημα για το αριθμητικό πεδίο. Συγκεκριμένα, για ένα σημείο  $\mu$  στο εσωτερικό του αριθμητικού πεδίου, αναζήτησε μοναδιαίο διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε  $x^*Ax = \mu$ , προτείνοντας έναν αλγόριθμο

για την επίλυση του προβλήματος αυτού [51]. Το 2009 ο Carden ασχολήθηκε με το ίδιο πρόβλημα και κατασκεύασε έναν καλύτερο σε ακρίβεια και ταχύτητα αλγόριθμο [10]. Στο δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής αυτής παρουσιάζουμε ένα νέο γεωμετρικό αλγόριθμο για το συγκεκριμένο αντίστροφο πρόβλημα, που βασίζεται σε στοιχειώδεις ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου.

Το 1968, οι J.G. Stampfli και J.P. Williams [46] έδειξαν ότι το αριθμητικό πεδίο γράφεται ως υπεραριθμήσιμη τομή κυκλικών δίσκων. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$$

δίνοντας μια νέα προοπτική στη μελέτη του χωρίου αυτού. Αυτό διότι πλέον το αριθμητικό πεδίο ορίζεται χωρίς τη χρήση εσωτερικού γινομένου αλλά μόνο με τη χρήση νόρμας. Παρακινούμενοι από τη γραφή αυτή του αριθμητικού πεδίου, στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε για πρώτη φορά ένα αριθμητικό πεδίο για όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικούς πίνακες, που το ονομάζουμε αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ως προς ένα πίνακα  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Συγκεκριμένα, το αριθμητικό πεδίο του  $A$  ως προς τον  $B$ , για μία νόρμα  $\|\cdot\|$ , ορίζεται να είναι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Το σύνολο αυτό ικανοποιεί βασικές ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου, όπως η κυρτότητα και η συμπάγεια. Στο κεφάλαιο αυτό επίσης δικαιολογούμε την ανάγκη χρησιμοποίησης του δεύτερου πίνακα  $B$ , αντί για κάποιας γενίκευσης του μοναδιαίου πίνακα, στον ορισμό του χωρίου αυτού, καθώς και ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι καλά ορισμένο. Στη συνέχεια, παρατηρείται η σχέση του νέου ορισμού με την έννοια της Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα, προχωρώντας έτσι στον ορισμό των συνόλων Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ως προς ένα πίνακα  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  για  $\epsilon \in [0, 1)$ ,

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι τα σύνολα αυτά είναι καλά ορισμένα για οποιουσδήποτε πίνακες  $A, B$  και  $\epsilon \in [0, 1)$ . Επιπλέον, παραθέτουμε μια σειρά από ιδιότητες για τα σύνολα αυτά, κάποιες από τις οποίες γενικεύουν γνωστές ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου ενώ άλλες δρούν επεξηγηματικά.

Ταυτόχρονα με τη μελέτη του κλασικού αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα, ανάμεσα σε πολλές γενικεύσεις του, ορίστηκε και μελετήθηκε και το αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων της μορφής

$$P(z) = A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \cdots + A_1 z + A_0,$$

όπου  $z$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή και  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ) με  $A_l \neq 0$ , το οποίο είναι το σύνολο

$$W(P(z)) = \{\mu \in \mathbb{C} : x^* P(\mu) x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\}.$$

Αν και όπως αναφέραμε το σύνολο αυτό ξεκίνησε ως γενίκευση του κλασικού αριθμητικού πεδίου, στη πορεία απέκτησε ξεχωριστή θέση στο χώρο της ανάλυσης πινάκων και δημιούργησε από μόνο του μια ερευνητική περιοχή. Επισημαίνεται δε το γεγονός ότι ενώ το σύνολο αυτό είχε ορισθεί αρκετά πιο πρίν (δεκαετία του 1970), μόλις το 1994 έγινε η πρώτη δημοσίευση πάνω στο θέμα αυτό από τους C.-K. Li και L. Rodman [36]. Από το σημείο αυτό και μετά αρκετοί ερευνητές ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο θέμα, δημοσιεύοντας αποτελέσματα για τη μορφή, τις ιδιότητες και τις εφαρμογές του συνόλου αυτού. Κάποιοι από αυτούς είναι οι P. Lancaster, A. Markus, H. Nakazato, I. Μαρουλάς και Π. Ψαρράκος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά τη Birkhoff–James  $\epsilon$ –ορθογωνιότητα, γενικεύουμε την έννοια του αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικού πίνακα σε αυτή του συνόλου Birkhoff–James  $\epsilon$ –ορθογωνιότητας ενός πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$  ως προς ένα πίνακα  $B$  ίδιων διαστάσεων, για  $\epsilon \in [0, 1)$ . Το σύνολο αυτό είναι το

$$W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z)) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι οι συντελεστές του  $P(z)$  και ο πίνακας  $B$  δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί πίνακες. Για τα νέα αυτά αριθμητικά πεδία πολυωνυμικών πινάκων αποδεικνύουμε πολλές από τις ιδιότητες που ισχύουν στο κλασικό αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα. Συγκεκριμένα, παραθέτουμε συνθήκες υπό τις οποίες τα σύνολα  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z))$  είναι μη κενά, εξετάζουμε πότε είναι φραγμένα και μελετάμε το σύνορό τους. Επιπλέον, μελετάμε τη μορφή που έχουν για συγκεκριμένες νόρμες πινάκων όπως αυτές που επάγονται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων.

## Δημοσιεύσεις από την παρούσα διατριβή

- Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios and P. Psarrakos, A definition of numerical range of rectangular matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **57** (2009) 459–475.
- Ch. Chorianopoulos, P. Psarrakos and F. Uhlig, A method for the inverse field of values problem, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **20** (2010) 198–206.
- Ch. Chorianopoulos and P. Psarrakos, Birkhoff–James approximate orthogonality sets and numerical ranges, *Linear Algebra and its Applications*, **434** (2011) 2089–2108.

# Κεφάλαιο 1

## Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

Το πρώτο κεφάλαιο της διατριβής αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση του (κλασικού) αριθμητικού πεδίου πίνακα και των ιδιοτήτων του. Πολλά από τα αποτελέσματα δίνονται με γνωστές αποδείξεις τους [26, 31] για λόγους πληρότητας και για την καλύτερη κατανόησή τους. Επιπλέον, με τον τρόπο αυτό, γίνεται (στη συνέχεια) εύκολα αντιληπτή η ανάγκη χρησιμοποίησης διαφορετικών αποδεικτικών τεχνικών στα Κεφάλαια 3 και 4, όπου οι νέοι ορισμοί βασίζονται στην έννοια της νόρμας πίνακα αντί αυτής του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων. Σημειώνεται ότι ολόκληρη η αποδεικτική διαδικασία της Παραγράφου 1.3, μέχρι και το Πρόγραμμα 1.3.5 είναι πρωτότυπη.

### 1.1 Ορισμός του Αριθμητικού Πεδίου

**Ορισμός 1.1.1.** Το αριθμητικό πεδίο (*numerical range, field of values*) ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ορίζεται ως το σύνολο

$$F(A) = \{x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Τα αριθμητικά πεδία κάποιων απλών πινάκων είναι τα ακόλουθα:

1.

$$\begin{aligned} F(aI_n) &= \{x^*(aI_n)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{a(x^*x) : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{a\}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \{3|x_2|^2 : 0 \leq |x_2|^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο είναι το κλειστό διάστημα  $[0, 3]$ .

3.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \{ 2x_2 \bar{x}_1 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \}, \end{aligned}$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο ταυτίζεται με τον κλειστό μοναδιαίο (κυκλικό) δίσκο  $\mathcal{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

## 1.2 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου

Το αριθμητικό πεδίο ενός  $n \times n$  μιγαδικού πίνακα παρουσιάζει πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες οι περισσότερες των οποίων σχετίζονται με τη γεωμετρία του.

**Πρόταση 1.2.1.** (Συμπάγεια) Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , το  $F(A)$  είναι συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

*Απόδειξη.* Άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το πεδίο  $F(A)$  είναι εικόνα της συνεχούς απεικόνισης  $x \mapsto x^*Ax$  από τη συμπαγή μοναδιαία σφαίρα του  $\mathbb{C}^n$  στο μιγαδικό επίπεδο.  $\square$

**Πρόταση 1.2.2.** Για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $a \in \mathbb{C}$ , ισχύουν

$$F(A + aI_n) = F(A) + a \quad \text{και} \quad F(aA) = aF(A).$$

**Πρόταση 1.2.3.** Για έναν πίνακα  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει  $F(A) = \{a\}$  αν και μόνο αν  $A = aI_n$ .

*Απόδειξη.* Το αντίστροφο έχειδειχθεί στην εισαγωγή του κεφαλαίου, στο πρώτο παράδειγμα. Για το ευθύ, από την Πρόταση 1.2.2, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι  $a = 0$  και

$$x^*Ax = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \bar{x}_i x_j) = 0,$$

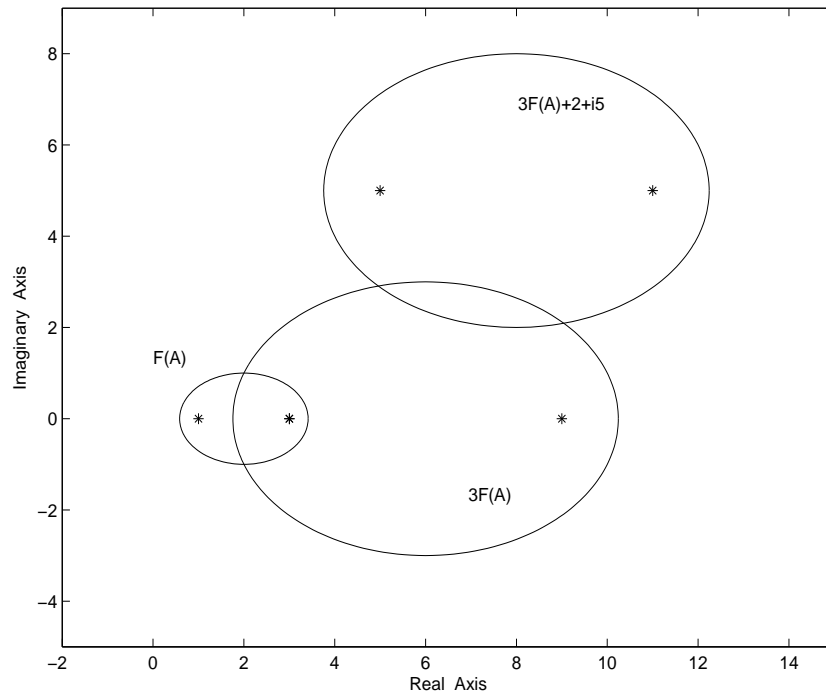
για κάθε διάνυσμα  $x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$  με  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ . Επιλέγοντας για  $x$  τα διανύσματα της κανονικής βάσης, προκύπτει άμεσα ότι τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι μηδενικά. Επιλέγοντας τώρα μοναδιαία διανύσματα  $x, y \in \mathbb{C}^n$  με  $x_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $x_j = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και με  $y_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $y_j = i \frac{\sqrt{2}}{2}$ , για κάθε  $i \neq j$ , βλέπουμε αντίστοιχα ότι  $a_{ij} = -a_{ji}$  και  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i \neq j$ ). Επομένως,  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) και καταλήγουμε στο ότι  $A = 0$ .  $\square$

**Παράδειγμα 1.2.1.** Θεωρούμε τον  $2 \times 2$  πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Το αριθμητικό του πεδίο, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 1.1, είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις δύο ιδιοτιμές του,  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = 3$ . Συγκεκριμένα, στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι το αριθμητικό πεδίο ενός  $2 \times 2$  πίνακα είναι πάντα έλλειψη με εστίες τις ιδιοτιμές του. Στο ίδιο σχήμα δίνονται και τα αριθμητικά πεδία των πινάκων

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 3A + (2 + i5)I_2 = \begin{bmatrix} 5 + i5 & 6 \\ 0 & 11 + i5 \end{bmatrix}.$$

Όπως είναι αναμενόμενο από την Πρόταση 1.2.2,

$$F(3A) = 3F(A) \quad \text{και} \quad F(3A + (2 + i5)I) = F(A) + 2 + i5.$$



Σχήμα 1.1: Τα αριθμητικά πεδία  $F(A)$ ,  $F(3A)$  και  $F(3A + (2 + i5)I_2)$ .

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$ . Τότε οι πίνακες

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

ονομάζονται *ερμιτιανό μέρος* και *αντιερμιτιανό μέρος* του  $A$ , αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι  $A = H(A) + S(A)$ , καθώς και ότι οι πίνακες  $H(A)$  και  $K(A) = -iS(A)$

είναι ερμιτιανοί. Για ένα μιγαδικό αριθμό, το φανταστικό και το πραγματικό του μέρος είναι οι προβολές του στον φανταστικό και στον πραγματικό άξονα, αντίστοιχα. Κατά ανάλογο τρόπο, το αριθμητικό πεδίο του ερμιτιανού και αντιερμιτιανού μέρους του  $A$  είναι οι προβολές του  $F(A)$  στον πραγματικό και το φανταστικό άξονα, αντίστοιχα.

**Πρόταση 1.2.4.** Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύουν

$$F(H(A)) = \operatorname{Re}\{F(A)\} \quad \text{και} \quad F(S(A)) = \operatorname{Im}\{F(A)\},$$

όπου το  $\operatorname{Im}\{\cdot\}$  περιλαμβάνει τη φανταστική μονάδα  $i$ .

**Πόρισμα 1.2.5.** Για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει ότι  $F(A) \subset \mathbb{R}$  αν και μόνο αν ο  $A$  είναι ερμιτιανός.

*Απόδειξη.* Έστω  $F(A) \subset \mathbb{R}$  και  $A = H(A) + S(A)$ , όπου  $H(A), S(A)$  είναι το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα  $A$ , αντίστοιχα. Τότε για κάθε  $x \in \mathbb{C}^n$ , είναι  $x^*Ax = x^*(H(A) + S(A))x = x^*H(A)x + x^*S(A)x \in \mathbb{R}$ . Όμως  $x^*S(A)x \in i \cdot \mathbb{R}$ , επομένως  $S(A) = 0$ . Δηλαδή, ο πίνακας  $A$  είναι ερμιτιανός.

Αν τώρα ο πίνακας  $A$  είναι ερμιτιανός, τότε για κάθε  $x \in \mathbb{C}^n$ ,

$$x^*Ax = x^*H(A)x = x^*\frac{A + A^*}{2}x = \frac{1}{2}(x^*Ax + x^*A^*x) = \operatorname{Re}\{x^*Ax\} \in \mathbb{R}.$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Ανάλογα, με απλές πράξεις αποδεικνύεται και το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 1.2.6.** Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$ .

- (i) Γενικά ισχύει ότι  $F(A^T) = F(A)$  και  $F(A^*) = \overline{F(A)}$ .
- (ii) Αν ο  $A$  είναι πραγματικός, τότε το  $F(A)$  είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μια ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου που προσέλκυσε από πολύ νωρίς το ενδιαφέρον των ερευνητών είναι το γεγονός ότι περιέχει πάντα το φάσμα.

**Πρόταση 1.2.7.** Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , το φάσμα του,  $\sigma(A)$ , περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο  $F(A)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\lambda \in \sigma(A)$  και  $x \in \mathbb{C}^n$  ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής  $\lambda$ . Τότε ισχύει  $\lambda = \lambda(x^*x) = x^*(\lambda x) = x^*Ax \in F(A)$ .  $\square$

Η παραπάνω ιδιότητα μας δείχνει άμεσα ότι οι ιδιοτιμές ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι, έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  θετικά ορισμένος (δηλαδή  $x^*Ax > 0$  για κάθε διάνυσμα  $x \neq 0$ ) και  $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  ένα ιδιοζεύγος του. Τότε, αν  $y = x/\|x\|$ , έπεται ότι  $\|y\|_2 = 1$  και  $\lambda y^*y = y^*(\lambda y) = y^*Ay > 0$ .

**Πρόταση 1.2.8.** (Υποπροσθετικότητα) Για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει

$$F(A + B) \subseteq F(A) + F(B).$$

Γνωρίζουμε ότι ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός (δηλαδή, ένας μετασχηματισμός ισομετρίας) αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του  $\mathbb{C}^n$ . Επομένως θα αφήνει αναλλοίωτο και το αριθμητικό πεδίο.

**Πρόταση 1.2.9.** Για κάθε  $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , με  $U$  ορθομοναδιαίο, ισχύει

$$F(U^*AU) = F(A).$$

Βάσει της παραπάνω ιδιότητας, έχουμε την ακόλουθη σημαντική πρόταση.

**Πρόταση 1.2.10.** (Κανονικότητα) Για κάθε κανονικό πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει  $F(A) = \text{Co}\{\sigma(A)\}$ , δηλαδή το αριθμητικό πεδίο κανονικού πίνακα είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του.

*Απόδειξη.* Ένας κανονικός πίνακας  $A$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι οι (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) ιδιοτιμές του  $A$ . Δηλαδή, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε  $A = U^*\Lambda U$ . Έτσι από την Πρόταση 1.2.9, έχουμε

$$\begin{aligned} F(A) &= F(U^*\Lambda U) = F(\Lambda) \\ &= \{x^* \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\} \\ &= \text{Co}\{\sigma(A)\} \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

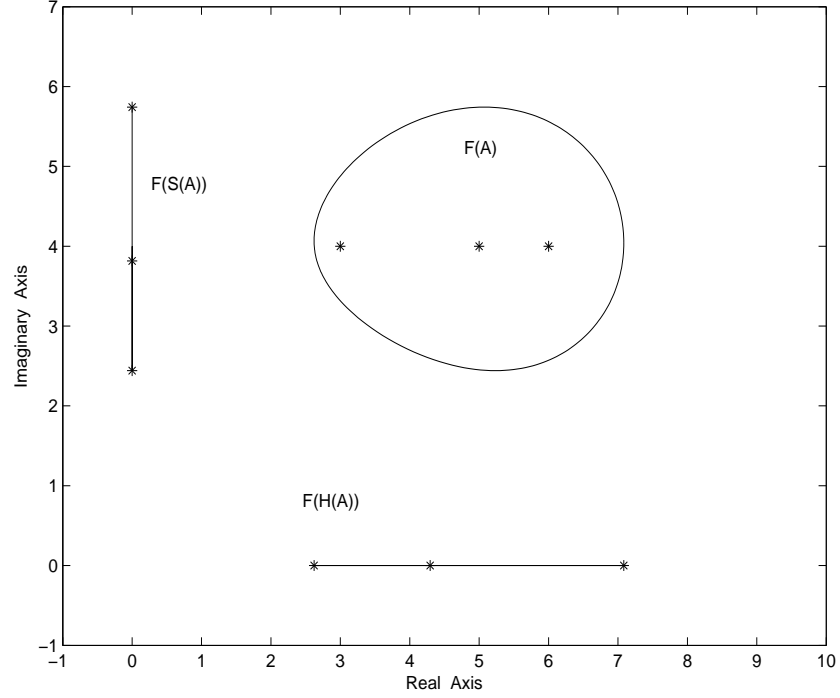
**Πόρισμα 1.2.11.** Αν ένας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό πεδίο του είναι το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του  $A$ .

**Παράδειγμα 1.2.2.** Ας θεωρήσουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 + i4 & -1 + i & i2 \\ 0 & 5 + i4 & 2 - i \\ 0 & 0 & 6 + i4 \end{bmatrix}$$

(γενικά μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να χρησιμοποιούμε στα παραδείγματα μας τριγωνικούς πίνακες λόγω του Θεωρήματος Τριγωνοποίησης του Schur και του αναλλοίωτου του αριθμητικού πεδίου κάτω από ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας). Στο Σχήμα 1.2, ο ωσειδής δίσκος είναι το  $F(A)$ . Το





Σχήμα 1.2: Τα αριθμητικά πεδία  $F(A)$ ,  $F(H(A))$  και  $F(S(A))$ .

ερμιτιανό μέρος του  $A$  είναι

$$H(A) = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 + i0.5 & i \\ -0.5 - i0.5 & 5 & 1 - i0.5 \\ -i & 1 + i0.5 & 6 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 2.622$ ,  $\lambda_2 = 4.294$  και  $\lambda_3 = 7.084$ . Το αντιερμιτιανό μέρος του  $A$ ,

$$S(A) = \begin{bmatrix} i4 & -0.5 + i0.5 & -i \\ 0.5 + i0.5 & i4 & 1 - i0.5 \\ i & -1 - i0.5 & i4 \end{bmatrix},$$

έχει ιδιοτιμές  $\rho_1 = i5.743$ ,  $\rho_2 = i3.816$  και  $\rho_3 = i2.441$ . Το  $F(H(A))$  είναι η προβολή του  $F(A)$  στον πραγματικό άξονα, ενώ το πεδίο  $F(S(A))$  είναι η προβολή του  $F(A)$  στον φανταστικό άξονα, όπως άλλωστε υπαγορεύει και η Πρόταση 1.2.4. Ο πίνακας  $H(A)$  είναι ερμιτιανός και το αριθμητικό πεδίο  $F(H(A))$  είναι το κλειστό πραγματικό διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του, όπως γνωρίζουμε και από το Πρόσχημα 1.2.11. Ο πίνακας  $S(A)$  από την άλλη, είναι αντιερμιτιανός (άρα και κανονικός) με φανταστικές ιδιοτιμές και από την Πρόταση 1.2.10, το αριθμητικό πεδίο  $F(S(A))$  ταυτίζεται με την κυρτή θήκη αυτών των ιδιοτιμών.

**Πόρισμα 1.2.12.** Ένας ερμιτιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

**Πόρισμα 1.2.13.** Ένας ερμιτιανός πίνακας  $H$  είναι θετικά ορισμένος ή θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν  $F(H) \subset (0, +\infty)$  ή  $[0, +\infty)$ , αντίστοιχα.

Για να παρουσιάσουμε την επόμενη ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το ευθύ άθροισμα δύο πινάκων  $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$  και  $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$  ορίζεται ως ο  $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$  πίνακας

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

**Πρόταση 1.2.14.** Για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$  και  $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ , ισχύει

$$F(A \oplus B) = \text{Co}\{F(A) \cup F(B)\}.$$

*Απόδειξη.* Αν  $A \oplus B \in \mathbb{C}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ , τότε για κάθε μοναδιαίο  $z \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$  με  $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ( $x \in \mathbb{C}^{n_1}, y \in \mathbb{C}^{n_2}$ ), προφανώς ισχύει  $z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By$ .

Εδώ  $y^*y = 1$  αν και μόνο αν  $x = 0$ . Στην περίπτωση αυτή  $z^*(A \oplus B)z = y^*By$ , συνεπώς  $F(B) \subseteq F(A \oplus B)$ . Όμοια μπορεί κανείς να δει ότι  $F(A) \subseteq F(A \oplus B)$ . Από τις σχέσεις αυτές έπεται άμεσα ότι  $F(A) \cup F(B) \subseteq F(A \oplus B)$ .

Όπως θα δείξουμε παρακάτω σε ξεχωριστή παράγραφο, το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα είναι κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι προκύπτει ότι  $\text{Co}\{F(A) \cup F(B)\} \subseteq F(A \oplus B)$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό για να ολοκληρωθεί η απόδειξη. Έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα

$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ( $x \in \mathbb{C}^{n_1}, y \in \mathbb{C}^{n_2}$ ). Τότε ισχύει

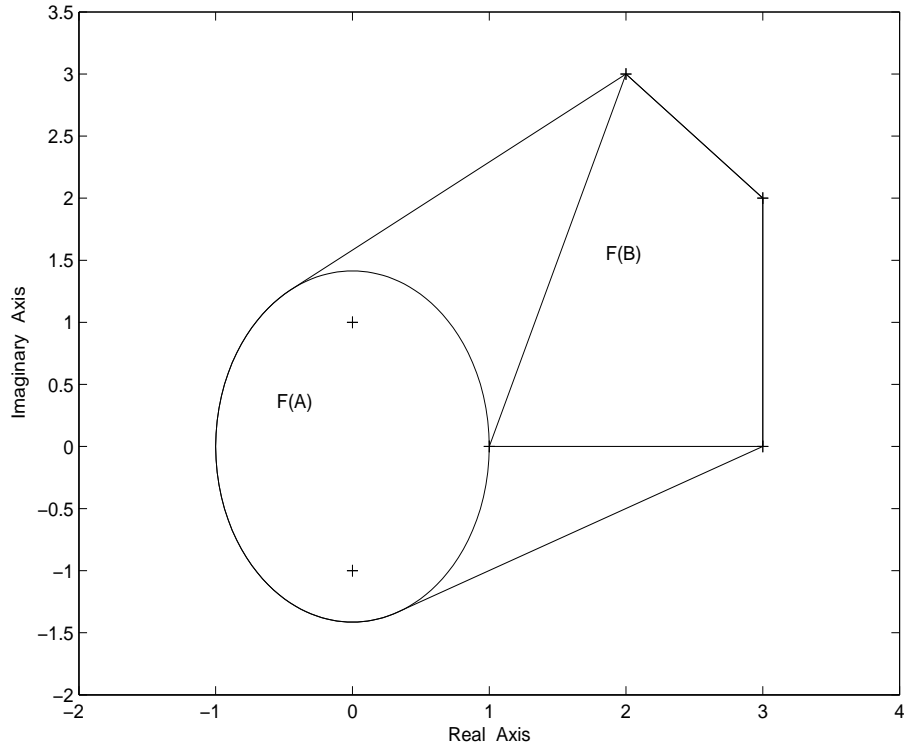
$$z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By = x^*x \frac{x^*Ax}{x^*x} + y^*y \frac{y^*By}{y^*y} \in \text{Co}\{F(A) \cup F(B)\},$$

όπου  $x^*x + y^*y = z^*z = 1$ . Δηλαδή, ο αριθμός  $x^*Ax + y^*By$  είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων των  $F(A)$  και  $F(B)$ .  $\square$

Από το πρώτο μέρος της παραπάνω απόδειξης προκύπτει άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 1.2.15.** Για κάθε κύριο υποπίνακα  $\hat{A}$  ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ισχύει  $F(\hat{A}) \subseteq F(A)$ .

**Παράδειγμα 1.2.3.** Έστω οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$  και  $B = \text{diag}\{1, 3, 3 + i2, 2 + i3\}$ . Τα αριθμητικά τους πεδία φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 1.3. Το πεδίο  $F(A)$  είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις ιδιοτιμές του  $A$ ,  $\lambda_1 = i$  και  $\lambda_2 = -i$ . Ο πίνακας  $B$  είναι κανονικός, αφού είναι διαγώνιος, επομένως το  $F(B)$



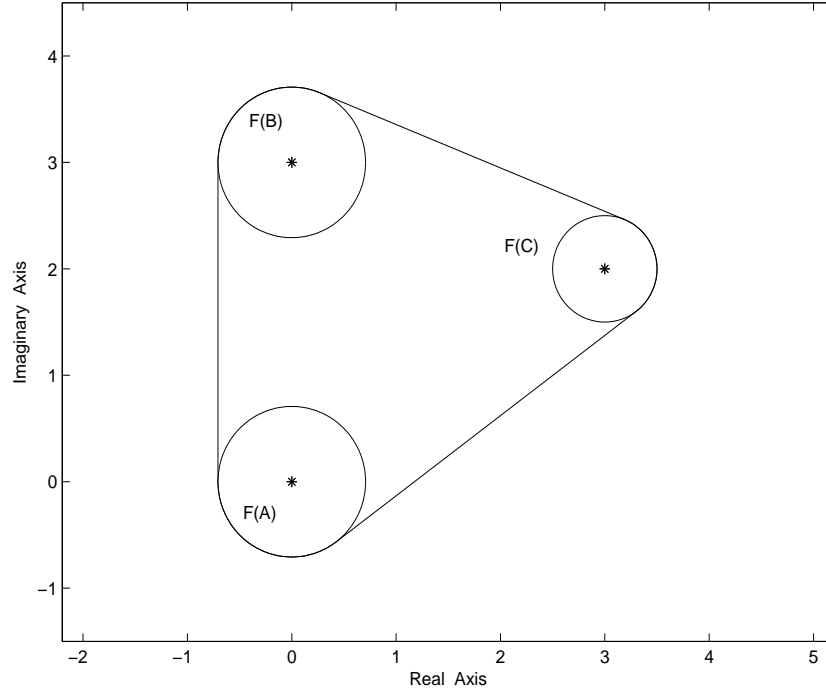
Σχήμα 1.3: Τα αριθμητικά πεδία  $F(A)$ ,  $F(B)$  και  $F(A \oplus B)$ .

είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.10. Έτσι το  $F(B)$  είναι το τετράπλευρο με κορυφές τις τέσσερις ιδιοτιμές του πίνακα  $B$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 3$ ,  $\rho_3 = 3 + i2$  και  $\rho_4 = 2 + i3$ . Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα  $F(A \oplus B)$  είναι η κυρτή θήκη των  $F(A)$  και  $F(B)$ , όπως υπαγορεύεται και από την Πρόταση 1.2.14.

**Παράδειγμα 1.2.4.** Έστω οι πίνακες Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} i3 & 1 & 0 \\ 0 & i3 & 1 \\ 0 & 0 & i3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 3+i2 & 1 \\ 0 & 3+i2 \end{bmatrix}.$$

Τα σύνολα  $F(A)$ ,  $F(B)$  και  $F(C)$  φαίνονται στο Σχήμα 1.4. Το  $F(A)$  είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα  $R = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . Σημειώνεται ότι το αριθμητικό πεδίο ενός  $n \times n$  πίνακα Jordan είναι πάντα κυκλικός δίσκος με κέντρο την ιδιοτιμή του και ακτίνα  $R = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$  [26]. Έτσι τα πεδία  $F(B)$  και  $F(C)$  είναι επίσης κυκλικοί δίσκοι με κέντρα τις ιδιοτιμές τους  $i3$  και  $3+i2$ , αντίστοιχα. Το αριθμητικό πεδίο  $F(A \oplus B \oplus C)$  είναι η κυρτή θήκη των  $F(A)$ ,  $F(B)$  και  $F(C)$ , όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα, γεγονός αναμενόμενο από την Πρόταση 1.2.14.



Σχήμα 1.4: Τα αριθμητικά πεδία  $F(A)$ ,  $F(B)$ ,  $F(C)$  και  $F(A \oplus B \oplus C)$ .

Μια έννοια άμεσα συνυφασμένη με αυτή του αριθμητικού πεδίου είναι η *αριθμητική ακτίνα* (*numerical radius*) ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , η οποία ορίζεται ως

$$r(A) = \max \{|z| : z \in F(A)\}.$$

Επιγραμματικά αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες της αριθμητικής ακτίνας, τις οποίες θα παρουσιάσουμε χωρίς απόδειξη. Αυτό διότι αν και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη μελέτη του αριθμητικού πεδίου, δεν παρουσιάζουν χρησιμότητα στη μελέτη των εννοιών που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια της διατριβής.

Η αριθμητική ακτίνα είναι υποπροσθετική, ιδιότητα που προκύπτει από την υποπροσθετικότητα του αριθμητικού πεδίου. Δηλαδή, για  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

Επίσης, για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , ισχύει

$$\frac{1}{2} \|A\|_2 \leq r(A) \leq \|A\|_2.$$

Η αριθμητική ακτίνα ενός πίνακα είναι διανυσματική νόρμα στο χώρο των  $n \times n$  μιγαδικών πινάκων, αλλά δεν είναι νόρμα πίνακα. Αντίθετα, η  $4r(A)$  είναι νόρμα

πίνακα. Επιπλέον, αν

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

είναι η φασματική ακτίνα ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , τότε  $\rho(A) \leq r(A)$ , διότι όπως είδαμε στην Πρόταση 1.2.7, το φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα περιέχεται στο αριθμητικό του πεδίο. Η παρακάτω ιδιότητα είναι γνωστή σαν ιδιότητα των δυνάμεων της αριθμητικής ακτίνας

$$r(A^k) \leq r(A)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Η ιδιότητα των δυνάμεων είναι η ιδιότητα που καθιστά την αριθμητική ακτίνα ένα σημαντικό εργαλείο στη μελέτη της ταχύτητας σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων στους πίνακες [15, 42].

### 1.3 Το Αριθμητικό Πεδίο ως Τομή Δίσκων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού για το αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών πινάκων αποδεικνύοντας πως το πεδίο αυτό εκφράζεται ως υπεραριθμήσιμη τομή κυκλικών δίσκων. Είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι με τη γραφή που θα δείξουμε, αποκαλύπτονται άμεσα σημαντικές ιδιοτητές του. Μια απόδειξη για τη γραφή αυτή του αριθμητικού πεδίου είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και οφείλεται στους J.G. Stampfli και J.P. Williams [46]. Μια δεύτερη, νέα απόδειξη παρατίθεται στη συνέχεια της παραγράφου και στηρίζεται στην έννοια της Birkhoff–James ορθογωνιότητας που ορίζεται σε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα  $(X, \|\cdot\|)$ . Στο χώρο αυτό, η συγκεκριμένη σχέση ορθογωνιότητας δεν ορίζεται μέσω εσωτερικού γινομένου αλλά επάγεται από τη νόρμα  $\|\cdot\|$  του χώρου.

**Ορισμός 1.3.1.** Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και  $x, y \in X$  δύο στοιχεία του. Τότε λέμε ότι το  $x$  είναι *Birkhoff–James ορθογώνιο* στο  $y$  και το συμβολίζουμε με  $x \perp_{BJ} y$ , αν ισχύει  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Αυτή η σχέση ορθογωνιότητας δεν είναι ούτε συμμετρική, ούτε προσθετική, αλλά είναι ομογενής [27]. Δηλαδή αν  $x \perp_{BJ} y$ , τότε για κάθε  $a, b \in \mathbb{C}$  μη μηδενικά, ισχύει  $ax \perp_{BJ} by$ . Ισχύει επίσης και το επόμενο λήμμα το οποίο δείχνει ότι η σχέση αυτή είναι μη τετριμμένη στο χώρο  $(X, \|\cdot\|)$  [27].

**Λήμμα 1.3.1.** Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Για οποιαδήποτε στοιχεία  $x, y \in X$  υπάρχει  $a \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $x \perp_{BJ} (y + ax)$ .

Έστω τώρα ένας μιγαδικός χώρος Banach  $(X, \|\cdot\|)$ . Ο G. Lumer [37] έδειξε ότι στο χώρο αυτό πάντα μπορούμε να ορίσουμε ένα μιγαδικό ημι-εσωτερικό γινόμενο  $[\cdot, \cdot] : X \times X \mapsto \mathbb{C}$  το οποίο εξαρτάται από τη νόρμα  $\|\cdot\|$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x, y, z \in X$  και για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  να ισχύουν:

- (i)  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$  και  $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ ,
- (ii)  $[x, x] = \|x\|^2 > 0$  για  $x \neq 0$ ,
- (iii)  $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$ .

Επιπλέον, βάσει των παραπάνω ορίζεται και το *αριθμητικό πεδίο ημι-εσωτερικού γινομένου* για έναν τελεστή  $A \in \mathfrak{B}(X)$  να είναι

$$F_{[\cdot, \cdot]}(A) = \{[Ax, x] \in \mathbb{C} : x \in X, [x, x] = 1\}.$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η κλειστή κυρτή θήκη  $\overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}$  ταυτίζεται με το χωρίο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\lambda, \|A - \lambda I\|), \end{aligned}$$

όπου με  $\mathcal{D}(\lambda, \rho)$  συμβολίζουμε τον κλειστό κυκλικό δίσκο με κέντρο  $\lambda$  και ακτίνα  $\rho$ .

**Λήμμα 1.3.2.** Έστω ένας μιγαδικός χώρος Banach  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $A \in \mathfrak{B}(X)$  ένας γραμμικός, φραγμένος τελεστής και  $[\cdot, \cdot]$  ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από τη νόρμα  $\|\cdot\|$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Αν  $I \perp_{BJ} A$ , τότε  $0 \in \overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}$ .
- (ii) Αν  $0 \in F_{[\cdot, \cdot]}(A)$ , τότε  $I \perp_{BJ} A$ .

Απόδειξη.

- (i) Έστω ότι  $I \perp_{BJ} A$ , δηλαδή  $\|I + \lambda A\| \geq 1$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Έστω ακόμη για άτοπο, ότι  $0 \notin \overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}$ . Τότε υπάρχει γωνία  $\theta \in [0, 2\pi]$  τέτοια ώστε το σύνολο  $\overline{\text{Co}F_{[\cdot, \cdot]}(e^{i\theta}A)} = e^{i\theta}\overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}$  να βρίσκεται στο αριστερό ανοιχτό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Από τον G. Lumer [37] όμως γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\|I + ae^{i\theta}A\|}{a} = \sup \text{Re}\{F_{[\cdot, \cdot]}(e^{i\theta}A)\},$$

όπου το αριστερό μέρος της τελευταίας ισότητας είναι πάντα μη αρνητικό, ενώ το δεξί είναι αρνητικό. Οδηγηθήκαμε λοιπόν σε αντίφαση, άρα  $0 \in \overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}$ .

- (ii) Αν  $0 \in F_{[\cdot, \cdot]}(A)$ , τότε υπάρχει  $x \in X$  τέτοιο ώστε  $[Ax, x] = 0$ . Επομένως,  $[(I - \lambda A)x, x] = [x, x] = 1$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Από τις ιδιότητες του ημι-εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$1^2 = |[x, x]|^2 \leq \|(I - \lambda A)x\|^2 \leq \|I - \lambda A\|^2,$$

άρα  $\|I - \lambda A\| \geq 1$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ , δηλαδή  $I \perp_{BJ} A$ . □

**Λήμμα 1.3.3.** Για κάθε  $A \in \mathfrak{B}(X)$  ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : I \perp_{BJ} (A - \mu I)\}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \mu I - (\lambda - \mu)I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Από τη συνέχεια των νορμών, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \mu I - (\lambda - \mu)I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|\frac{1}{\lambda - \mu}(A - \mu I) - I\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|I - \lambda(A - \mu I)\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Έτσι καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1.3.4.** Έστω ένας μιγαδικός χώρος Banach  $(X, \|\cdot\|)$ . Τότε για κάθε  $A \in \mathfrak{B}(X)$  ισχύει  $F_{\|\cdot\|}(A) = F_{[\cdot, \cdot]}(A)$ , όπου  $[\cdot, \cdot]$  ένα ημί-εσωτερικό γινόμενο που επαγεται από τη νόρμα  $\|\cdot\|$ .

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα λήμματα έχουμε

$$\begin{aligned} F_{[\cdot, \cdot]}(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{[\cdot, \cdot]}(A - \mu I)\} \\ &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : I \perp_{BJ} (A - \mu I)\} \\ &= F_{\|\cdot\|}(A) \\ &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A - \mu I)\}\} \\ &= \overline{\text{Co}\{F_{[\cdot, \cdot]}(A)\}}. \end{aligned}$$

Όμως αφού το  $F_{\|\cdot\|}(A)$  είναι (υπεραριθμήσιμη) τομή κυκλικών δίσκων, έπεται άμεσα ότι είναι κυρτό και συμπαγές. Επομένως,  $F_{\|\cdot\|}(A) = F_{[\cdot, \cdot]}(A)$ .  $\square$

Στην περίπτωση των μιγαδικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, όπως ο  $\mathbb{C}^n$ , μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ημι-εσωτερικό γινόμενο με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο που παράγει τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ . Από την παρατήρηση αυτή και το τελευταίο θεώρημα προκύπτει άμεσα το επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 1.3.5.** Το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  γράφεται

$$\begin{aligned} F(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\lambda, \|A - \lambda I_n\|_2). \end{aligned}$$

Δηλαδή, το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα γράφεται σαν υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων. Αυτός ο τρόπος γραφής του αριθμητικού πεδίου, αφ' ενός εξασφαλίζει άλλη μια απόδειξη της συμπάγειας του συνόλου, αφ' ετέρου αποκαλύπτει με προφανή τρόπο τη σημαντική ιδιότητα της κυρτότητας (για την οποία υπάρχει πλήθος αποδείξεων στην εκτεταμένη βιβλιογραφία που αφορά το αριθμητικό πεδίο).

**Θεώρημα 1.3.6.** (Toeplitz–Hausdorff) *Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , το αριθμητικό του πεδίο  $F(A)$  είναι κυρτό.*

Στην περίπτωση των  $2 \times 2$  τετραγωνικών πινάκων, όπως ήδη αναφέραμε, συμβαίνει κάτι αξιοσημείωτο. Για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , το πεδίο  $F(A)$  είναι πάντα ελλειπτικός δίσκος. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1.3.7.** (Ελλειπτικό Θεώρημα) *Έστω  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$ . Το αριθμητικό πεδίο του  $A$  είναι ένας ελλειπτικός δίσκος με εστίες  $\lambda_1, \lambda_2$  και μήκος μικρού άξονα ίσο με  $\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}$ .*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη (βλέπε [33]) χρησιμοποιεί βασικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου όπως η στροφή και η μεταφορά και το ότι αυτό είναι αναλλοίωτο υπό ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Θα διακρίνουμε κάποιες περιπτώσεις.

Αρχικά θεωρούμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός. Τότε από την Πρόταση 1.2.10 το  $F(A)$  είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα  $\lambda_1, \lambda_2$ , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως εκφυλισμένη έλλειψη με εστίες  $\lambda_1, \lambda_2$  και μήκος μικρού άξονα ίσο με 0.

Έστω τώρα ότι ο  $A$  δεν είναι κανονικός. Αν αντικαταστήσουμε τον  $A$  με  $\frac{1}{2}(A - \operatorname{tr}(A)I_2)$ , τότε  $\operatorname{tr}(A) = 0$ . Αν και οι δύο ιδιοτιμές του  $A$  είναι 0, από το Θεώρημα Τριγωνοποίησης του Schur, προκύπτει ότι ο  $A$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής  $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , του οποίου το αριθμητικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned} F(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \{ b\bar{x}_1x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι κυκλικός δίσκος και μπορούμε να το δούμε σαν έλλειψη με δύο εστίες ίσες με 0 και μήκος μικρού άξονα ίσο με  $|b|$ .

Έστω τώρα ότι ο πίνακας  $A$  έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές  $a, -a$ . Αν αντικαταστήσουμε τον  $A$  με  $A/a$ , τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $a = 1$ . Αφού ο  $A$  δεν είναι κανονικός, πάλι από το Θεώρημα τριγωνοποίησης του Schur, θεωρούμε ότι είναι ορθομοναδιαία όμοιος με ένα άνω τριγωνικό πίνακα της μορφής  $\begin{bmatrix} 1 & 2c \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  με  $c > 0$ . Έστω τώρα  $C = \{(A + A^*) + \gamma(A - A^*)\}/2$ , όπου  $\gamma = \sqrt{1 + c^2}/2$ .



Τότε και οι δύο ιδιοτιμές του  $C$  είναι μηδενικές και ο  $C$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{1+c^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Από τα προηγούμενα όμως το  $F(C)$  είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\sqrt{1+c^2}$ . Όμως αν  $(x+iy) \in F(A)$  αυτό σημαίνει ότι  $(x+i\gamma y) \in F(C)$ . Αφού όμως ο δίσκος  $F(C)$  έχει σύνορο της μορφής  $\{e^{it}\sqrt{1+c^2} : t \in \mathbb{R}\}$ , έχουμε ότι το πεδίο  $F(A)$  έχει σύνορο της μορφής  $\{\cos(t)\sqrt{1+c^2} + i\sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Άρα το  $F(A)$  είναι ελλειπτικός δίσκος με μήκη μεγάλου και μικρού άξονα  $2\sqrt{1+c^2}$  και  $2c$  αντίστοιχα και εστίες τις ιδιοτιμές 1, -1.  $\square$

Η ιδιότητα της κυρτότητας, πέρα του γεγονότος ότι είναι η ίδια πολύ ενδιαφέρουσα, γίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη και στην απόδειξη άλλων ιδιοτήτων του αριθμητικού πεδίου.

**Θεώρημα 1.3.8.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Τότε το 0 δεν ανήκει στο  $F(A)$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\theta \in [0, 2\pi]$  τέτοιος ώστε ο ερμιτιανός πίνακας  $H(e^{i\theta}A) = \frac{1}{2}(e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)$  να είναι θετικά ορισμένος.

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 1.2.4, το ευθύ προκύπτει άμεσα αφού αν ο πίνακας  $H(e^{i\theta}A)$  είναι θετικά ορισμένος για κάποιο  $\theta \in [0, 2\pi]$ , τότε το πεδίο  $F(e^{i\theta}A)$  βρίσκεται στο δεξιό ανοιχτό ημιεπίπεδο του  $\mathbb{C}$ . Επομένως, το 0 δεν ανήκει στο  $F(e^{i\theta}A)$ , άρα δεν ανήκει και στο  $F(A)$ .

Για το αντίστροφο, υπενθυμίζουμε ότι από τα διαχωριστικά θεωρήματα, υπάρχει ευθεία  $\ell$  στο επίπεδο τέτοια ώστε καθένα από τα ξένα συμπαγή και κυρτά σύνολα  $\{0\}$  και  $F(A)$  να βρίσκονται εκατέρωθεν της  $\ell$ . Στρέφοντας τους άξονες κατάλληλα ώστε η  $\ell$  να συμπίσει με μια κατακόρυφη ευθεία στο δεξιό ανοιχτό ημιεπίπεδο, προκύπτει ότι για τη συγκεκριμένη αυτή στροφή  $\theta \in [0, 2\pi]$ , το αριθμητικό πεδίο  $F(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}F(A)$  ανήκει στο δεξιό ανοιχτό ημιεπίπεδο. Άρα ο ερμιτιανός πίνακας  $H(e^{i\theta}A) = \frac{1}{2}(e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)$  είναι θετικά ορισμένος.  $\square$

**Πόρισμα 1.3.9.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i)  $0 \in \text{Int}[F(A)]$  αν και μόνο αν για κάθε  $\theta \in [0, 2\pi]$  ο  $H(e^{i\theta}A)$  είναι αόριστος.
- (ii)  $0 \in \partial F(A)$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$  τέτοιο ώστε ο πίνακας  $H(e^{i\theta_0}A)$  να είναι μη αντιστρέψιμος και θετικά ημιορισμένος.
- (iii)  $0 \notin F(A)$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$  τέτοιο ώστε ο πίνακας  $H(e^{i\theta_0}A)$  να είναι θετικά ορισμένος.

## 1.4 Προσέγγιση του Αριθμητικού Πεδίου

Γενικά, για ένα σημείο  $\mu$  του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$ , δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα  $x \in \mathbb{C}^n$  που ικανοποιούν τη σχέση  $x^*Ax = \mu$ . Κάτι τέτοιο είναι αναλυτικά εφικτό μόνο στην περίπτωση “ακραίων” συνοριακών

σημείων. Την περίπτωση των εσωτερικών σημείων τη μελετάμε αριθμητικά στο επόμενο κεφάλαιο.

**Λήμμα 1.4.1.** Αν  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  με  $x_0^* x_0 = 1$ , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i)  $\operatorname{Re}\{x_0^* A x_0\} = \max\{\operatorname{Re}\{a\} : a \in F(A)\},$
- (ii)  $x_0^* H(A) x_0 = \max\{h : h \in F(H(A))\}$  και
- (iii)  $H(A) x_0 = \lambda_{\max}(H(A)),$

όπου  $\lambda_{\max}(H(A))$  είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα  $H(A)$ .

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των (i) και (ii) έπεται από το γεγονός ότι

$$\operatorname{Re}\{x^* A x\} = \frac{1}{2}(x^* A x + \overline{x^* A x}) = \frac{1}{2}(x^* A x + x^* A^* x) = x^* H(A) x.$$

Έστω τώρα  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  μια βάση ιδιοδιανυσμάτων του  $H(A)$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  του  $H(A)$ , δηλαδή  $H(A) y_j = \lambda_j y_j$ . Τότε το διάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  μπορεί να γραφεί στη μορφή  $x_0 = \sum_{j=1}^n c_j y_j$  με  $\sum_{j=1}^n \bar{c}_j c_j = 1$ , ώστε  $x_0^* x_0 = 1$ . Επομένως, η ποσότητα

$$x_0^* H(A) x_0 = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j c_j \lambda_j = \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \lambda_j$$

λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της όταν  $c_1 = 1$  και  $c_2 = \dots = c_n = 0$ , δίνοντας έτσι την ισοδυναμία μεταξύ των (i) και (ii).  $\square$

Από το προηγούμενο λήμμα επαληθεύεται ότι

$$\max\{\operatorname{Re}\{a\} : a \in F(A)\} = \max\{h : h \in F(H(A))\} = \lambda_{\max}(H(A)).$$

Αυτό σημαίνει ότι το “δεξιότερο” σημείο του  $F(A)$  έχει πραγματικό μέρος τη μέγιστη ιδιοτιμή του ερμιτιανού μέρους του πίνακα  $A$ ,  $\lambda_{\max}(H(A))$ . Ουσιαστικά το λήμμα λέει ότι αν υπολογισθεί η  $\lambda_{\max}(H(A))$  και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της  $x$ , τότε το “δεξιότερο” συνοριακό σημείο του  $F(A)$  είναι το  $x^* A x$ . Επιπλέον, η κατακόρυφη ευθεία  $\{\lambda_{\max}(H(A)) + it : t \in \mathbb{R}\}$  είναι εφαπτομένη του κυρτού συνόλου  $F(A)$  σε αυτό το συνοριακό σημείο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση  $e^{-i\theta} F(e^{i\theta} A) = F(A)$ , είναι δυνατόν να πάρουμε όσα συνοριακά σημεία και όσες εφαπτόμενες ευθείες θέλουμε στρέφοντας κατά διάφορες γωνίες το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  και κάνοντας τον απαιτούμενο υπολογισμό των ιδιοζευγών.

Για μια γωνία  $\theta \in [0, 2\pi]$ , ορίζουμε  $\lambda_\theta = \lambda_{\max}(H(e^{i\theta} A))$  και  $x_\theta \in \mathbb{C}^n$  ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Δηλαδή,  $H(e^{i\theta} A) x_\theta = \lambda_\theta x_\theta$  με  $x_\theta^* x_\theta = 1$ . Συμβολίζουμε επίσης  $l_\theta$  την εφαπτόμενη ευθεία  $\{e^{-i\theta}(\lambda_\theta + it) : t \in \mathbb{R}\}$  και συμβολίζουμε το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την  $l_\theta$  και περιέχει το πεδίο  $F(A)$ , με  $H_\theta = e^{-i\theta}\{z : \operatorname{Re}\{z\} \leq \lambda_\theta\}$ . Βάσει των παραπάνω έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1.4.2.** Για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και κάθε  $\theta \in [0, 2\pi]$ , ο μιγαδικός αριθμός  $p_\theta = x_\theta^* A x_\theta$  είναι ένα συνοριακό σημείο του  $F(A)$ . Η ευθεία  $l_\theta$  είναι εφαπτόμενη του  $F(A)$  με  $p_\theta \in l_\theta \cap F(A)$  και  $F(A) \subset H_\theta$  για κάθε  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Επειδή το  $F(A)$  είναι κυρτό, γίνεται εποπτικά τουλάχιστον φανερό ότι κάθε συνοριακό σημείο του εμφανίζεται ως ένα  $p_\theta$  και για κάθε  $\mu \notin F(A)$  υπάρχει μια ευθεία  $l_\theta$  που αφήνει το  $F(A)$  και το  $\mu$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, δηλαδή  $\mu \notin H_\theta$  ενώ  $F(A) \in H_\theta$ . Έτσι το αριθμητικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άπειρη τομή κλειστών ημιεπιπέδων, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.4.3.** Για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$$F(A) = \text{Co} \{p_\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = \bigcap_{0 \leq \theta \leq 2\pi} H_\theta.$$

Αφού δε γίνεται να υπολογίσουμε άπειρα σημεία  $p_\theta$  και άπειρες ευθείες  $l_\theta$ , απλά αρκούμαστε σε ένα διακριτό ανάλογο του τελευταίου θεωρήματος, επιλέγοντας μια διαμέριση του  $[0, 2\pi]$ , έστω  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ , όπου  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k = 2\pi$ . Αν  $p_{\theta_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) είναι τα διαδοχικά συνοριακά σημεία του  $F(A)$  και  $H_{\theta_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) είναι τα αντίστοιχα ημιεπίπεδα που ορίζονται από τις εφαπτόμενες ευθείες  $l_{\theta_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) του  $F(A)$  στα σημεία  $p_{\theta_i}$ , τότε ορίζουμε το εγγεγραμμένο στο  $F(A)$  πολύγωνο  $F_{in}(A, \Theta) = \text{Co} \{p_{\theta_1}, \dots, p_{\theta_k}\}$  και το περιγεγραμμένο στο  $F(A)$  πολύγωνο  $F_{out}(A, \Theta) = H_{\theta_1} \cap H_{\theta_2} \cap \dots \cap H_{\theta_k}$ . Τα δύο αυτά σύνολα είναι εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση αντίστοιχα για το  $F(A)$ , αφού είναι προφανές ότι για κάθε διαμέριση  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ , ισχύει

$$F_{in}(A, \Theta) \subset F(A) \subset F_{out}(A, \Theta).$$

Στα παραδείγματα της διατριβής, χρησιμοποιούμε την παραπάνω μέθοδο για την προσέγγιση-σχεδίαση του (κλασικού) αριθμητικού πεδίου  $F(A)$  μέσω του εγγεγραμμένου πολυγώνου  $F_{in}(A, \Theta)$ , για διαμέριση  $\Theta$  με  $k = 120$ .

## 1.5 Σύνоро του Αριθμητικού Πεδίου

Το αριθμητικό πεδίο ενός  $2 \times 2$  πίνακα  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , είναι

- ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου αν και μόνο αν  $\lambda_1 = \lambda_2$  και  $b = 0$ ,
- το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα  $\lambda_1, \lambda_2$  αν και μόνο αν  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  και  $b = 0$ ,
- ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα  $|b|/2$  αν και μόνο αν  $\lambda_1 = \lambda_2$  και
- ένας ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις  $\lambda_1, \lambda_2$  αν και μόνο αν  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  και  $b \neq 0$ .

Τι γίνεται όμως για πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων; Σε μεγαλύτερες διαστάσεις συναντάμε μια πολύ πιο πλούσια ποικιλία σχημάτων και μορφών για το αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών πινάκων. Από την Πρόταση 1.2.10, κάθε κυρτό πολύγωνο είναι το αριθμητικό πεδίο ενός κανονικού πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι κορυφές του πολυγώνου αυτού. Έτσι κάθε φραγμένο και κυρτό σύνολο μπορεί να προσεγγιστεί από το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα του οποίου η διάσταση μπορεί να απαιτηθεί να είναι μεγάλη.

Στην παράγραφο αυτή, βασικός στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε κάποια στοιχεία για τη μορφή του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα, καθώς και τη σχέση του συνόρου του  $F(A)$ ,  $\partial F(A)$ , με το φάσμα του  $A$ . Ένα  $a \in \partial F(A)$  καλείται *γωνιακό σημείο* (*angular point*, *sharp point*) του  $F(A)$  αν υπάρχουν γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  με  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$  και  $\theta_1 - \theta_2 < \pi$ , για τις οποίες

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta}a\} = \max\{\operatorname{Re}\{b\} : b \in F(e^{i\theta}A)\}, \text{ για κάθε } \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

**Θεώρημα 1.5.1.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Αν  $a$  είναι ένα γωνιακό σημείο του  $F(A)$ , τότε το  $a$  είναι ιδιοτιμή του  $A$ .

*Απόδειξη.* Από την ιδιότητα της μεταφοράς του αριθμητικού πεδίου, υποθέτουμε ότι  $a = 0$ , χωρίς βλάβη της γενικότητας. Έστω  $x \in \mathbb{C}^n$  τέτοιο ώστε  $x^*Ax = 0$  και έστω  $y \in \mathbb{C}^n$  ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} G_y(\lambda, z) &= (x + \bar{z}y)^*(\lambda I_n - A)(x + zy) \\ &= (z^2 + 2\operatorname{Re}\{x^*y\}z + 1)\lambda - ((y^*Ay)z^2 + 2\operatorname{Re}\{y^*Ax\}z) \\ &= (\lambda - \lambda_y(z))R_y(z) \end{aligned}$$

των  $\lambda, z \in \mathbb{C}$ . Η συνάρτηση

$$\lambda_y(z) = \frac{(y^*Ay)z^2 + 2\operatorname{Re}\{y^*Ax\}z}{z^2 + 2\operatorname{Re}\{x^*y\}z + 1},$$

είναι αναλυτική σε μια περιοχή του 0 και ισχύει  $\lambda_y(0) = 0$ , ενώ η συνάρτηση

$$R_y(z) = z^2 + 2\operatorname{Re}\{x^*y\}z + 1$$

είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται σε περιοχή του 0. Προφανώς, υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $t \in (0, \varepsilon)$  να είναι

$$0 = G_y(\lambda_y(t), t) = (x + ty)^*(\lambda_y(t)I_n - A)(x + ty).$$

Συνεπώς, για κάθε  $t \in (0, \varepsilon)$ ,

$$\lambda_y(t) = \frac{[(y^*Ay)t + 2\operatorname{Re}\{y^*Ax\}]t}{t^2 + 2\operatorname{Re}\{x^*y\}t + 1} \in F(A)$$

και αφού το 0 είναι γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου του πίνακα  $A$ , η καμπύλη  $\lambda_y(t)$  ανήκει σε έναν κώνο

$$\mathcal{K}_0 = \{\omega \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \operatorname{Arg}\{\omega\} \leq \theta_2, 0 < \theta_2 - \theta_1 \leq \psi_0 < \pi\}.$$

Για  $\varepsilon$  κατάλληλα μικρό, ο λόγος  $t/t^2 + 2\operatorname{Re}\{x^*y\}t + 1$  είναι θετικός για κάθε  $t \in (0, \varepsilon)$ . Τότε από τον τύπο της καμπύλης  $\lambda_y(t)$ , αυτή ανήκει στον κώνο  $K_0$  για κάθε  $y \in \mathbb{C}^n$  (αυθαίρετο) αν και μόνο αν  $Ax = 0$ . Επομένως, το 0 είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $x$  το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά του.  $\square$

**Πόρισμα 1.5.2.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  έχει το πολύ  $n$  γωνιακά σημεία. Επιπλέον, είναι κυρτό πολύγωνο αν και μόνο αν  $F(A) = \operatorname{Co}\{\sigma(A)\}$ .

Πρέπει να αναφέρουμε βέβαια ότι αν και κάθε γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου είναι ιδιοτιμή στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μια ιδιοτιμή  $\lambda \in \sigma(A)$  καλείται *κανονική* αν η γεωμετρική της πολλαπλότητα ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα και κάθε ιδιοδιάνυσμα του  $A$  που αντιστοιχεί στη  $\lambda$  είναι κάθετο σε κάθε ιδιοδιάνυσμα άλλης ιδιοτιμής. Ακολουθεί ένα θεώρημα που μας εξασφαλίζει την κανονικότητα κάθε ιδιοτιμής που βρίσκεται στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα.

**Θεώρημα 1.5.3.** Αν  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $a \in \partial F(A) \cap \sigma(A)$ , τότε το  $a$  είναι κανονική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Επιπλέον, αν  $m$  είναι η πολλαπλότητα της  $a$ , τότε ο  $A$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής  $aI_m \oplus B$ , όπου  $B \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$  και  $a \notin \sigma(B)$ .

*Απόδειξη.* Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα του  $a$  είναι  $m$ , τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Τριγωνοποίησης Schur, ο  $A$  είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $T$  του οποίου τα πρώτα  $m$  διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με  $a$  και τα υπόλοιπα είναι οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του  $A$ . Υποθέτουμε ότι ο  $T$  έχει μη μηδενικό στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου σε μια από τις  $m$  πρώτες γραμμές του. Τότε υπάρχει ένας κύριος  $2 \times 2$  υποπίνακας  $T_0 = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$ , με  $c \neq 0$ . Όμως το αριθμητικό πεδίο  $F(T_0)$  είναι ή κυκλικός δίσκος με ακτίνα  $|c|/2$  (όταν  $a = b$ ) ή μη εκφυλισμένη έλλειψη με εστίες  $a, b$ . Έτσι έχουμε ότι το  $a$  είναι εσωτερικό σημείο του  $F(T_0)$ . Όμως  $F(T_0) \subseteq F(T) = F(A)$ , από τις Προτάσεις 1.2.9 και 1.2.15. Δηλαδή, το  $a$  είναι εσωτερικό του  $F(A)$ , άτοπο αφού το  $a$  είναι συνοριακό σημείο του  $F(A)$ . Από το άτοπο αυτό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου στις  $m$  πρώτες γραμμές του  $T$ . Έτσι  $T = aI_m \oplus B$ ,  $B \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$ . Τα υπόλοιπα συμπεράσματα προκύπτουν άμεσα.  $\square$

**Πόρισμα 1.5.4.** Αν  $n - 1$  ιδιοτιμές του πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (συνυπολογίζοντας και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες) ανήκουν στο σύνορο του  $F(A)$ , τότε ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός.

**Πόρισμα 1.5.5.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Τότε  $F(A) = \operatorname{Co}\{\sigma(A)\}$  αν και μόνο αν ο  $A$  είναι κανονικός ή είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής  $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ , όπου ο  $A_1$  είναι κανονικός και  $F(A_2) \subset F(A_1)$ .

**Πόρισμα 1.5.6.** Αν  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $n \leq 4$ , τότε ο  $A$  είναι κανονικός αν και μόνο αν  $F(A) = \text{Co}\{\sigma(A)\}$ .

## 1.6 Μια Γενίκευση του Αριθμητικού Πεδίου

Ένα χαρακτηριστικό του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων είναι ο μεγάλος αριθμός γενικεύσεων του που παρουσιάζονται και μελετώνται συστηματικά στη βιβλιογραφία. Εδώ θα παρουσιάσουμε μόνο μία από τις γενικεύσεις του, η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια.

**Ορισμός 1.6.1.** Το  $q$ -αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ορίζεται ως το σύνολο

$$F(A; q) = \{y^*Ax : x, y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1, x^*x = 1, y^*x = q\},$$

για  $0 \leq q \leq 1$ .

Το  $q$ -αριθμητικό πεδίο έχει μελετηθεί σε βάθος από πολλούς ερευνητές και αποτελεί μια από τις πολυδουλεμένες, ερευνητικά, γενικεύσεις του κλασικού αριθμητικού πεδίου [2, 34, 35]. Θα παρουσιάσουμε εν συντομία κάποιες από τις βασικότερες ιδιότητες αυτού του πεδίου. Παρατηρούμε ότι για  $q = 1$ , προκύπτει ότι  $F(A; 1) = F(A)$ , για οποιονδήποτε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Θεώρημα 1.6.1.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Για κάθε  $q \in [0, 1]$ , το πεδίο  $F(A; q)$  είναι συμπαγές και κυρτό.

**Θεώρημα 1.6.2.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- (i)  $F(S^*AS; q) \subseteq F(A; q)$ , για κάθε πίνακα  $S \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $S^*S = I_m$ .
- (ii)  $F(A; q) = F(U^*AU; q)$ , για κάθε  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ορθομοναδιαίο.
- (iii)  $F(aA + bI_n; q) = aF(A; q) + bq$ , για κάθε  $a, b \in \mathbb{C}$ .
- (iv)  $F(A; qz) = zF(A; q)$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| = 1$ .
- (v)  $F(A; q) = \{z\}$  αν και μόνο αν  $A = \mu I_n$  και  $q\mu = z$ .

Από τη μελέτη του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$  ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είδαμε ότι το σύνολο  $\partial F(A)$  μπορεί να έχει γωνιακά σημεία και μάλιστα, αν ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός, τότε το  $F(A)$  είναι κυρτό πολύγωνο, συγκεκριμένα είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του  $A$ . Στο επόμενο θεώρημα αποκαλύπτεται η σχέση του φάσματος ενός τετραγωνικού πίνακα και του  $q$ -αριθμητικού του πεδίου.

**Θεώρημα 1.6.3.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $0 \leq q < 1$ . Τότε η  $\text{Co}\{q\sigma(A)\} \subseteq F(A; q)$ . Επιπλέον, αν ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα και  $q < 1$ , τότε  $\text{Co}\{q\sigma(A)\} \subset \text{Int}[F(A; q)]$ .

**Θεώρημα 1.6.4.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $0 < q_1 < q_2 \leq 1$ . Τότε ισχύει ότι

$$\frac{1}{q_2} F(A; q_2) \subseteq \frac{1}{q_1} F(A; q_1)$$

**Θεώρημα 1.6.5.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και έστω  $R = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \{\|A - \lambda I_n\|_2\}$ . Τότε  $F(A; 0) = \mathcal{D}(0, R)$ .

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα του  $q$ -αριθμητικού πεδίου είναι το ότι για  $q < 1$  δε μπορεί να έχει γωνιακά σημεία.

**Θεώρημα 1.6.6.** Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $0 \leq q < 1$ . Αν  $A \neq aI_n$ , τότε το  $\partial F(A; q)$  είναι παντού διαφορίσιμο. Συγκεκριμένα το  $\partial F(A)$  δεν μπορεί να είναι κυρτό πολύγωνο η ευθύγραμμο τμήμα.

Έχει παρατηρηθεί από τη μελέτη του  $q$ -αριθμητικού πεδίου πως το σύνορό του δεν έχει ευθύγραμμα τμήματα για  $q < 1$ , χωρίς όμως να έχει αποδειχθεί. Στο Κεφάλαιο 3, θα αποδειχθεί ότι πράγματι το σύνορό του για  $q < 1$  δεν έχει ευθύγραμμα τμήματα.

## Κεφάλαιο 2

# Ένα Αντίστροφο Πρόβλημα για το Αριθμητικό Πεδίο

### 2.1 Το Αντίστροφο Πρόβλημα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για την επίλυση ενός αντιστρόφου προβλήματος του αριθμητικού πεδίου. Αυτό το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και ένα εσωτερικό σημείο  $\mu$  του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$ . Μπορεί να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $x_\mu \in \mathbb{C}^n$  τέτοιο ώστε  $\mu = x_\mu^* A x_\mu$ ;

Ένα τέτοιο διάνυσμα  $x_\mu$  θα το καλούμε γεννήτορα του  $\mu$ . Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε για την επίλυση του προβλήματος αυτού βασίζεται στις πιο βασικές ιδιότητες του  $F(A)$  όπως η κυρτότητα, η στροφή και η μεταφορά, ιδιότητες που σχολιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σημειώνουμε ότι η εύρεση γεννητόρων για συνοριακά σημεία του αριθμητικού πεδίου έχει ουσιαστικά αντιμετωπιστεί στην Παράγραφο 1.4.

Η επίλυση του παραπάνω αντιστρόφου προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί και ένας τρόπος ελέγχου για το αν ένα δεδομένο  $\mu \in \mathbb{C}$  είναι σημείο του αριθμητικού πεδίου ή όχι. Το να γνωρίζει κανείς αν ένας μιγαδικός ανήκει στο αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη συστημάτων. Αυτό διότι η συνθήκη " $0 \in F(A)$ " συνδέεται άμεσα με την ευστάθεια συνεχών συστημάτων της μορφής  $\dot{x} = Ax$  και διακριτών συστημάτων της μορφής  $x_{k+1} = Ax_k$  [11, 24]. Ένας από τους λόγους είναι το γεγονός ότι η συγκεκριμένη συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη δυνατότητα διαγωνοποίησης του πίνακα μέσω σχέσης ισοτιμίας [26]. Επιπλέον, γίνεται κατανοητή η ανάγκη υπολογισμού της απόστασης του 0 από το σύνορο του αριθμητικού πεδίου (είτε  $0 \in F(A)$ , είτε  $0 \notin F(A)$ ). Με τον τρόπο αυτό το πρόβλημα της ευστάθειας μεταφέρεται στο υπολογισμό της ελάχιστης απόστασης του 0 από το σύνορο του πεδίου  $F(A)$ . Η απόσταση αυτή είναι γνωστή και ως αριθμός Crawford [11, 24, 52].



Υπενθυμίζουμε ότι το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \text{ και } S(A) = iK(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

(δηλαδή,  $K(A) = (A - A^*)/(i2)$ ), αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$A = H(A) + S(A) = H(A) + iK(A),$$

Ο F. Uhlig [51] έθεσε πρώτος το παραπάνω αντίστροφο πρόβλημα και πρότεινε έναν πολύπλοκο γεωμετρικό αλγόριθμο για την επίλυσή του. Ο αλγόριθμός του παράγει (με τυχαίο τρόπο) σημεία του πεδίου  $F(A)$  που περιβάλλουν το  $\mu$ , κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι τα συνοριακά σημεία του  $F(A)$  και οι μοναδιαίοι γεννητορές τους μπορούν να υπολογιστούν από τη μέθοδο ιδιοτιμών του C.R. Johnson [28] που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.4. Έπειτα, η μέθοδος του F. Uhlig [51] συνεχίζει με μια επαναληπτική διαδικασία να περιβάλλει το επιθυμητό σημείο  $\mu$  με όλο και κοντινότερά του σημεία του  $F(A)$ .

Στη συνέχεια, ο R. Carden [10] παρατήρησε τη σύνδεση μεταξύ του αντίστροφου προβλήματος του αριθμητικού πεδίου με επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης ιδιοπροβλημάτων και παρουσίασε μια πιο απλή μέθοδο που βασίζεται στα διανύσματα Ritz όπως αυτά χρησιμοποιούνται στη μέθοδο Arnoldi. Με τον τρόπο αυτό κατάφερε να πάρει ακριβή αποτελέσματα για τα περισσότερα σημεία  $\mu$  με λίγες επαναλήψεις. Συγκεκριμένα η μεθοδός του βασίζεται:

- (α) στην κατασκευή, με επαναληπτική διαδικασία, τριών σημείων του  $F(A)$  που περιβάλλουν το  $\mu$  και τους αντίστοιχους γεννητορές τους και
- (β) στο γεγονός ότι, δοθέντων δύο σημείων  $\mu_1, \mu_2 \in F(A)$  και των γεννητόρων τους, μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν γεννήτορα για κάθε κυρτό συνδυασμό των  $\mu_1$  και  $\mu_2$  πραγματοποιώντας υποβιβασμό στην  $2 \times 2$  περίπτωση.

Το μεγαλύτερο μέρος του υπολογιστικού κόστους της επαναληπτικής διαδικασίας για να περικυκλωθεί το  $\mu$  από σημεία του αριθμητικού πεδίου με γνωστούς γεννήτορες βρίσκεται στον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιάνυσμάτων τους, όπου κάθε ιδιοανάλυση κοστίζει  $O(n^3)$  για έναν  $n \times n$  πίνακα  $A$ . Όταν το  $\mu$  περικυκλωθεί, το υπολογιστικό κόστος που απομένει εξαρτάται από τον υπολογισμό των τετραγωνικών μορφών  $x^*Ax$  ή  $x^*Ay$ , που η καθεμία κοστίζει μόνο  $O(n^2)$ .

Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν αρκετά πιο απλό αλγόριθμο για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος του αριθμητικού πεδίου, σε σχέση με τους δύο προηγούμενους. Ο αλγόριθμος αυτός είναι γρηγορότερος και δίνει ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα ακόμα και σε περιπτώσεις που οι προηγούμενες δύο μέθοδοι αποτυγχάνουν. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν το σημείο  $\mu$  βρίσκεται πολύ κοντά στο σύνορο  $\partial F(A)$  και στην περίπτωση που  $\mu \in F(A)$  αλλά και όταν  $\mu \notin F(A)$ . Επιπλέον, διαφέρει και από τον αλγόριθμο του R. Carden αλλά και του F. Uhlig [10, 51] στα παρακάτω σημεία:

- (i) Αντί για ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ συνοριακών σημείων του  $F(A)$  που έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο Johnson [28], χρησιμοποιούμε ελλείψεις που είναι εικόνες των  $z^*Az$ , όπου το διάνυσμα  $z$  κινείται πάνω σε έναν μέγιστο κύκλο στη μοναδιαία σφαίρα του  $\mathbb{C}^n$ . Αυτοί οι μέγιστοι κύκλοι στη μοναδιαία σφαίρα απεικονίζονται σε ελλείψεις μέσω της απεικόνισης  $x \mapsto x^*Ax$ , όπως έδειξε ο Davis [13]. Η χρήση ελλείψεων αντί ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα δύο υπολογισθέντα σημεία του συνόρου  $\partial F(A)$  μας βοηθούν στο να πάρουμε γεννήτορες για σημεία εκατέρωθεν του  $\mu$  πιο εύκολα και πιο γρήγορα (βλέπε τον Πίνακα 3 παρακάτω).
- (ii) Για δύο δεδομένα σημεία  $\alpha_1, \alpha_2 \in F(A) \cap \text{Im}\{\mu\} \cdot \mathbb{R}$  με  $\text{Re}\{\alpha_1\} \leq \text{Re}\{\mu\} \leq \text{Re}\{\alpha_2\}$  και γνωστούς κάποιους γεννήτορές τους, υπολογίζουμε έναν γεννήτορα του  $\mu$  εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.1.1 παρακάτω (βλέπε [26, σελ. 25]) αντί να πραγματοποιούμε υποβιβασμό στην  $2 \times 2$  περίπτωση όπως στο [10].
- (iii) Ας υποθέσουμε ότι στις δύο αρχικές ιδιοανaluύσεις των ερμιτιανών πινάκων  $H(A)$  και  $-iK(A)$ , οι τομές των παραγόμενων ελλείψεων με την ευθεία  $\text{Im}\{\mu\} \cdot \mathbb{R}$  δεν μας δίνουν ένα ζεύγος γεννητόρων σημείων του αριθμητικού πεδίου δεξιά και αριστερά του  $\mu$ . Τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για ερμιτιανούς πίνακες της μορφής  $A(\theta) = \cos(\theta)H(A) + \sin(\theta)iK(A)$  μέχρι οι ελλείψεις των μεγάλων κύκλων που θα προκύπτουν εντός του  $F(A)$  είτε ικανοποιούν το (ii) πιο πάνω και μπορούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.1.1 ή μέχρι ένας από τους πίνακες  $A(\theta)$  να γίνει (θετικά ή αρνητικά) ορισμένος. Στην περίπτωση αυτή συμπεραίνουμε ότι  $\mu \notin F(A)$  και σταματάμε.

**Πρόταση 2.1.1.** [26, σελίδα 25] Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ένας πίνακας του οποίου το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  δεν είναι μονοσύνολο και έστω  $a$  και  $c$  δύο σημεία του  $F(A)$  στον πραγματικό άξονα με  $a < 0 < c$ . Έστω ότι  $x_a, x_c \in \mathbb{C}^n$  δύο μοναδιαίοι γεννήτορες των  $x_a^*Ax_a = a$  και  $x_c^*Ax_c = c$ , αντίστοιχα.

- (i) Για  $x(t, \theta) = e^{i\theta}x_a + tx_c \in \mathbb{C}^n$ ,  $\alpha(\theta) = e^{-i\theta}x_a^*Ax_c + e^{i\theta}x_c^*Ax_a$  και  $t, \theta \in \mathbb{R}$ , έχουμε ότι  $x(t, \theta)^*Ax(t, \theta) = ct^2 + \alpha(\theta)t + a$  και  $\alpha(-\varphi) \in \mathbb{R}$  όπου  $\varphi = \arg(x_c^*Ax_a - x_a^T \bar{A} \bar{x}_c)$ .

- (ii) Για  $t_1 = \left( -\alpha(-\varphi) + \sqrt{\alpha(-\varphi)^2 - 4ac} \right) / (2c)$ , έχουμε ότι

$$x(t_1, -\varphi) \neq 0 \quad \text{και} \quad \frac{x(t_1, -\varphi)^*}{\|x(t_1, -\varphi)\|_2} A \frac{x(t_1, -\varphi)}{\|x(t_1, -\varphi)\|_2} = 0.$$

*Απόδειξη.* Υπολογίζουμε τον μιγαδικό αριθμό  $x(t, \theta)^*Ax(t, \theta)$ ,

$$\begin{aligned} x(t, \theta)^*Ax(t, \theta) &= (e^{i\theta}x_a + tx_c)^*A(e^{i\theta}x_a + tx_c) \\ (e^{-i\theta}x_a^* + tx_c^*)A(e^{i\theta}x_a + tx_c) &= x_a^*Ax_a + te^{-i\theta}x_a^*Ax_c + te^{i\theta}x_c^*Ax_a + t^2x_c^*Ax_c \\ &= ct^2 + \alpha(\theta)t + a, \end{aligned}$$

όπου  $\alpha(\theta) = e^{-i\theta}x_a^*Ax_c + e^{i\theta}x_c^*Ax_a$ . Αν  $x_c^*Ax_a - x_a^T\overline{A}x_c = re^{i\varphi}$  με  $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ . Επιπλέον, έχουμε

$$r = e^{-i\varphi}x_c^*Ax_a - e^{-i\varphi}x_a^T\overline{A}x_c.$$

Όμως,  $\alpha(-\varphi) = e^{i\varphi}x_a^*Ax_c + e^{-i\varphi}x_c^*Ax_a$ , ενώ

$$\begin{aligned}\bar{r} + \alpha(-\varphi) &= e^{i\varphi}x_a^*Ax_c + e^{-i\varphi}x_c^*Ax_a + e^{i\varphi}x_c^T\overline{A}x_a - e^{i\varphi}x_a^*Ax_c \\ &= 2\operatorname{Re}\{e^{i\varphi}x_c^T\overline{A}x_a\}.\end{aligned}$$

Αφού όμως  $r \in \mathbb{R}$ , έπεται ότι  $\alpha(-\varphi) \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι για

$$t_1 = \frac{-\alpha(-\varphi) + \sqrt{\alpha(-\varphi)^2 - 4ac}}{2c},$$

ισχύει  $x(t_1, \theta)^*Ax(t_1, \theta) = 0$ , και  $x(t_1, -\varphi) \neq 0$ , οπότε το διάνυσμα  $\frac{x(t_1, -\varphi)^*}{\|x(t_1, -\varphi)\|_2}$  αποτελεί μοναδιαίο γεννήτορα του 0.  $\square$

## 2.2 Ο Αλγόριθμος

Για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και ένα εσωτερικό σημείο  $\mu$  του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$ , το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε είναι η εύρεση ενός γεννήτορα  $x \in \mathbb{C}^n$  με  $x^*Ax = \mu$  ( $= x^*\mu I_n x$ ). Αντικαθιστούμε το παραπάνω πρόβλημα με το ισοδύναμο πρόβλημα

$$x^*(A - \mu I_n)x = 0.$$

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $\mu = 0$  και αναζητάμε μοναδιαίο διάνυσμα  $x_0$  τέτοιο ώστε  $x_0^*Ax_0 = 0$ , δηλαδή απλώς αντικαθιστούμε τον πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $A - \mu I_n$ , αν  $\mu \neq 0$ .

Κύριος στόχος μας είναι η εύρεση γεννητόρων δύο πραγματικών σημείων του  $F(A)$  εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

*Εύρεση αρχικών συνοριακών σημείων και αντίστοιχων γεννητόρων.* Κατασκευάζουμε τέσσερα σημεία του συνόρου  $\partial F(A)$ ,  $p_i$  και τους γεννητορές τους  $x_i \in \mathbb{C}^n$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), υπολογίζοντας τις μεγαλύτερες και τις μικρότερες ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανυσματά  $x_i$  των πινάκων  $H(A) = (A + A^*)/2$  και  $K(A) = (A - A^*)/(i2)$ . Θέτοντας  $p_i = x_i^*Ax_i$ , λαμβάνουμε τα τέσσερα σημεία  $p_i \in \partial F(A)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) που οριοθετούν κατακόρυφα και οριζόντια το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$ . Τα (συνοριακά) σημεία του  $F(A)$  με το μεγαλύτερο και το μικρότερο πραγματικό μέρος τα συμβολίζουμε  $rM$  και  $rm$  αντίστοιχα, ενώ τα (συνοριακά) σημεία του  $F(A)$  με το μεγαλύτερο και το μικρότερο φανταστικό μέρος τα συμβολίζουμε  $iM$  και  $im$  αντίστοιχα. Αν κάποιο από αυτά βρίσκεται σε απόσταση της τάξης  $10^{-13}$  από το 0, τότε λέμε ότι το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι ο γεννήτορας που αναζητάμε. Αν όμως κάποιος από τους ερμιτιανούς πίνακες  $H(A)$  και  $K(A)$  είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, τότε σταματάμε αφού θα έχουμε ότι  $\mu \notin F(A)$ .

*Εύρεση πραγματικών σημείων και αντίστοιχων γεννητόρων.* Γνωρίζοντας τα αρχικά τέσσερα συνοριακά σημεία  $p_i$  και τους αντίστοιχους γεννήτορες  $x_i \in \mathbb{C}^n$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), βρίσκουμε τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα των ελλείψεων που ορίζουν οι μέγιστοι κύκλοι της μοναδιαίας σφαίρας του  $\mathbb{C}^n$  οι οποίοι διέρχονται από ζεύγη γεννητόρων  $(x_i, x_j)$ . Σημειώνεται ότι δύο μη συνευθειακά διανύσματα της μοναδιαίας σφαίρας του  $\mathbb{C}^n$  ορίζουν πάντα ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας, ο οποίος μέσω της απεικόνισης  $x \mapsto x^*Ax$  δίνει μια έλλειψη εντός του  $F(A)$  [13]. Επιπλέον, επειδή ενδιαφερόμαστε για σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα, επικεντρωνόμαστε στους γεννήτορες που αντιστοιχούν σε ζεύγη σημείων  $(p_i, p_j)$ , με ετερόσημα φανταστικά μέρη. Αν κάποια από αυτά τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα βρίσκονται εκατέρωθεν του 0, τότε υπολογίζουμε άμεσα έναν γεννήτορα του σημείου  $0 \in F(A)$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.1. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος. Στην αντίθετη περίπτωση, κατασκευάζουμε επιπλέον συνοριακά σημεία του  $F(A)$  με τη γνωστή μέθοδο Johnson [28], επιλέγοντας κατάλληλες γωνίες στροφής, όπως αναλύουμε παρακάτω.

Ας θεωρήσουμε τώρα  $(x, y)$  ένα ζεύγος από γεννητόρες συνοριακών σημείων του πεδίου  $F(A)$  που έχουμε ήδη κατασκευάσει. Τότε η έλλειψη που αντιστοιχεί στον μέγιστο κύκλο που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα  $x, y \in \mathbb{C}^n$  είναι

$$(tx + (1-t)y)^*A(tx + (1-t)y) = (x^*Ax + y^*Ay - (x^*Ay + y^*Ax))t^2 + (-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay. \quad (2.2.1)$$

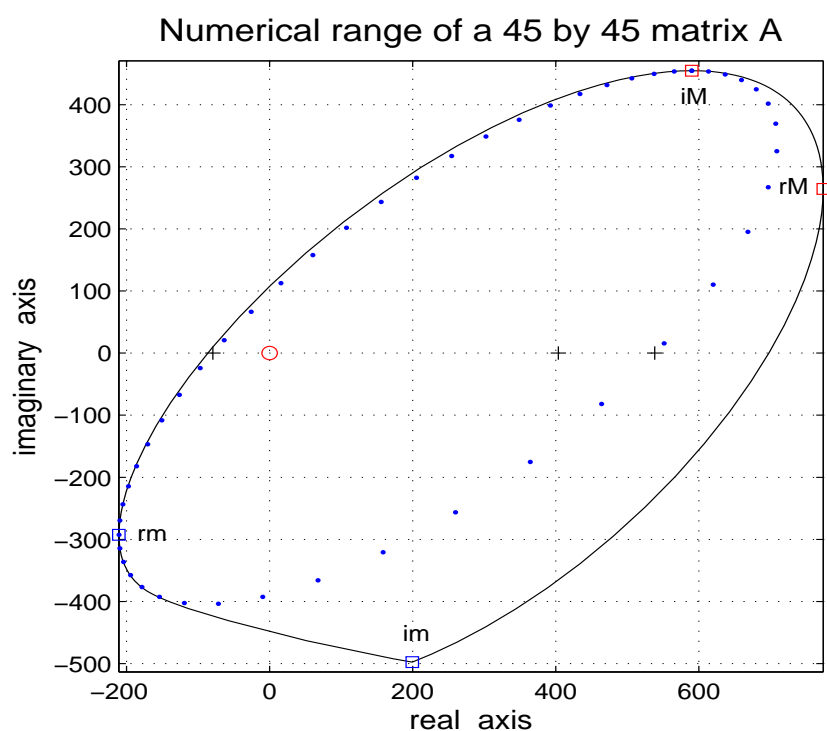
Ουσιαστικά πρόκειται για μια μιγαδική πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας μας ενδιαφέρουν μόνο οι λύσεις που έχουν μηδενικό φανταστικό μέρος ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.1.1. Θέτοντας 0 το φανταστικό μέρος της (2.2.1), οδηγούμαστε στην παρακάτω πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές:

$$t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0 \quad (2.2.2)$$

για  $q = \text{Im}\{x^*Ax\}$ ,  $p = \text{Im}\{y^*Ay\}$  και  $r = \text{Im}\{x^*Ay + y^*Ax\}$ , όπου  $f = p + q - r$  και  $g = (r - 2p)/f$ . Η εξίσωση (2.2.2) έχει δύο πραγματικές λύσεις  $t_i$ ,  $i = 1, 2$ , οι οποίες δίνουν δύο γεννήτορες  $x_i = t_i x + (1 - t_i)y$  ( $i = 1, 2$ ) για δύο σημεία στον πραγματικό άξονα. Κανονικοποιώντας τα διανύσματα  $x_i$  έχουμε τους γεννήτορες που θέλουμε. Σημεία μιας έλλειψης μέγιστου κύκλου ( $\bullet$ ) και οι τομές της με τον πραγματικό άξονα (+) φαίνονται στο Σχήμα 2.1 για έναν συγκεκριμένο πίνακα  $A$  που θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό συνοριακών σημείων και αντίστοιχων γεννητόρων, ας υποθέσουμε ότι αντίθετα με το Σχήμα 2.1, οι ελλείψεις που κατασκευάστηκαν μέχρι στιγμής δε δίνουν σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα εκατέρωθεν του 0. Τότε είμαστε υποχρεωμένοι να επιλύσουμε επιπλέον ιδιοπροβλήματα ερμιτιανών πινάκων της μορφής

$$A(\theta) = H(e^{i\theta}A) = \cos(\theta)H(A) + \sin(\theta)iK(A),$$



Σχήμα 2.1: Το σύνολο του αριθμητικού πεδίου ( $-$ ), με τα σημεία του  $\partial F(A)$  με το μικρότερο και το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος να είναι τα  $rm$  ( $\square$ ) και  $rM$  ( $\square$ ) αντίστοιχα και τα σημεία του  $F(A)$  με το μικρότερο και το μεγαλύτερο φανταστικό μέρος να είναι τα  $im$  ( $\square$ ) και  $iM$  αντίστοιχα ( $\square$ ). Σημεία της εικόνας (έλλειψη) ( $\bullet$ ) του μέγιστου κύκλου που περνάει από τους γεννήτορες των  $iM$  και  $rm$  και οι τομές της με τον πραγματικό άξονα ( $+$ ) (και σημεία προηγούμενης έλλειψης). Η αρχή των αξόνων συμβολίζεται με “ $\circ$ ”.

για κατάλληλες γωνίες  $\theta \neq 0, \pi/2$  (όπως έγινε στην αρχή με τους πίνακες  $H(A)$  και  $iK(A)$ ). Αν για παράδειγμα όλες οι αρχικές ελλείψεις τέμνουν τον πραγματικό άξονα από τα δεξιά του 0 και  $\text{Im}\{rm\} < 0$ , τότε διχοτομούμε το δεύτερο τεταρτημόριο και υπολογίζουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $x_{new}$  του ερμιτιανού πίνακα  $A(3\pi/4)$  για να βρούμε ένα σημείο στο σύνορο  $\partial F(A)$  που βρίσκεται μεταξύ των  $iM$  και  $rm$ . Έτσι, προχωράμε με διχοτομήσεις μέχρι να καταλήξουμε σε ένα θετικά ή αρνητικά ορισμένο πίνακα  $A(\theta)$  που θα μας δείξει ότι  $\mu \notin F(A)$  ή σε μια έλλειψη που τέμνει τον πραγματικό άξονα από τα αριστερά του 0 οπότε θα μπορούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.1. Ο αριθμός των επαναλήψεων της μεθόδου μέσω των διχοτομήσεων είναι γενικά μικρός, συνήθως μικρότερος του 4 και πιθανώς 10 με 20 όταν το 0 βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη ή ίση του  $10^{-13}$  από το σύνορο  $\partial F(A)$ .

Γενικά, το τμήμα του αλγορίθμου με το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος είναι η επίλυση των ιδιοπροβλημάτων των ερμιτιανών πινάκων  $A(\theta)$ , με κόστος  $O(n^3)$ . Ο υπόλοιπος αλγόριθμος απαιτεί τον υπολογισμό ενός πλήθους τετραγωνικών μορφών  $x^*Ay$  και την επίλυση δευτεροβαθμίων εξισώσεων της μορφής (2.2.2) με κόστος  $O(n^2)$ .

## 2.3 Αριθμητικά Παραδείγματα και Αξιολόγηση του Αλγόριθμου

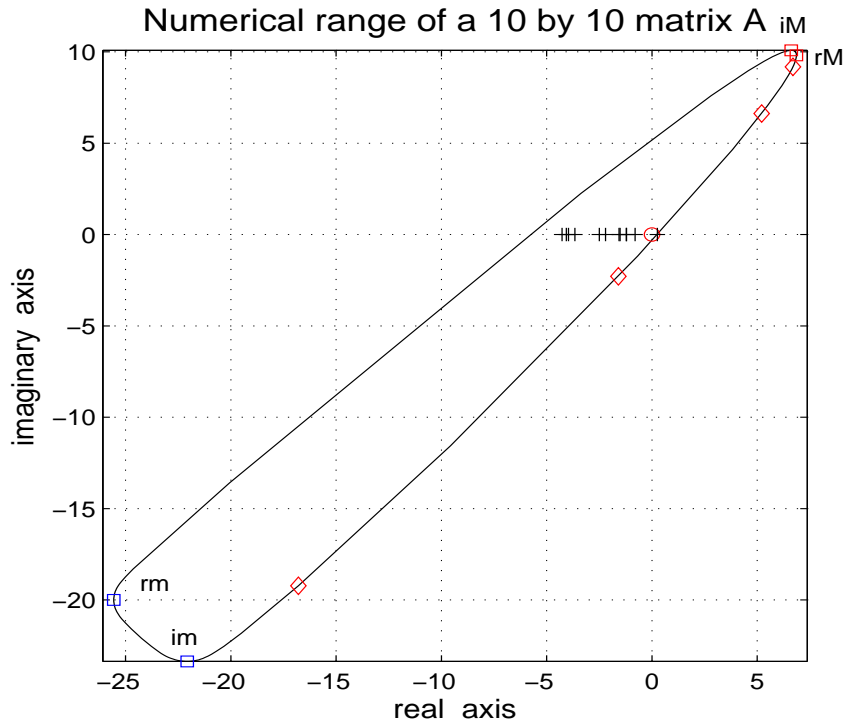
Ο  $45 \times 45$  μιγαδικός πίνακας του οποίου το αριθμητικό πεδίο φαίνεται στο Σχήμα 2.1 κατασκευάζεται από τον μιγαδικό πίνακα  $B \in \mathbb{C}^{45 \times 45}$  στο [24, σελ. 463]. Ο πίνακας  $B$  είναι το άθροισμα του πίνακα Fiedler  $F = (|i - j|)$  και του πίνακα Moler  $M = U^T U$ , επί  $i$ , όπου  $U$  άνω τριγωνικός με  $u_{i,j} = -1$  για  $j > i$ : δηλαδή,  $B = F + iM$ . Παίρνουμε τον  $A$  του Σχήματος 2.1 προσθέτοντας τον πίνακα με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1 πολλαπλασιασμένο με  $-3 + i5$  και μετακινώντας κατά  $\mu = -200 + i500$ , ή σε MATLAB συμβολισμό,  $A=B+(-3+5i)*\text{ones}(45)-(-200+500i)*\text{eye}(45)$ . Εδώ βλέπουμε κάποια συγκριτικά αποτελέσματα των αλγορίθμων [10, 51] και του δικού μας αλγόριθμου:

$n = 45$	χρόνος εκτέλεσης	ιδιοανάλυσεις	σφάλμα $ x^*Ax - 0 $
F. Uhlig [51]	0.1 ως 0.15 sec	3	$10^{-10}$ το $9 \cdot 10^{-11}$
R. Carden [10]	0.0071 sec	3	$3.6 \cdot 10^{-13}$
ο αλγόριθμός μας	0.0042 sec	2	$2.3 \cdot 10^{-13}$

Πίνακας 1

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα στη πρώτη γραμμή (του Uhlig [51]) βασίζονται στην επιλογή τυχαίων παραγόμενων διανυσμάτων του  $\mathbb{C}^n$  και επομένως τα αποτελέσματα αυτά θα ποικίλουν ανάλογα με την επιλογή των διανυσμάτων.

Για τον ίδιας μορφής  $500 \times 500$  πίνακα  $B$ , θεωρούμε τον πίνακα  $A$  που είναι  $A=B+(-3+i5)*\text{ones}(500)-(-200+i500)*\text{eye}(500)$  και τον συμβολίζουμε με  $A_{500,500}$ . Τα αποτελέσματα εδώ έχουν ως εξής:



Σχήμα 2.2: Το σύνολο του αριθμητικού πεδίου  $(-)$ , με τα σημεία με το μικρότερο και το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος του  $\partial F(A - \mu I_{10})$ ,  $rm$  (□) και  $rM$  αντίστοιχα (◇) και τα σημεία με το μεγαλύτερο και το μικρότερο φανταστικό μέρος  $iM$  (◇) και  $im$  αντίστοιχα (□). Σημεία του αριθμητικού πεδίου στον πραγματικό άξονα (+), κάποια στα αριστερά και ένα στα δεξιά του 0, καθώς επίσης και συννοριακά σημεία του  $\partial F(A)$  (◇) που προέκυψαν από 4 βήματα διχοτόμησης.

$n = 500$	χρόνος εκτέλεσης	ιδιοαναλύσεις	σφάλμα $ x^*Ax - 0 $
F. Uhlig [51]	2.3 ως 4.8 sec	0 ως 1	$5 \cdot 10^{-10}$ ως $4 \cdot 10^{-12}$
Carden [10]	0.75 sec	2	$3.7 \cdot 10^{-11}$
ο αλγόριθμός μας	0.24 sec	4	$6 \cdot 10^{-13}$

Πίνακας 2

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Πινάκων 1 και 2, γίνεται φανερή η “καλή” συμπεριφορά του προτεινόμενου αλγορίθμου στην αύξηση των διαστάσεων του προβλήματος.

Το επόμενο παράδειγμά μας αφορά έναν  $10 \times 10$  πίνακα  $A$  που παράγεται από την εντολή  $A = \text{randn}(10) + (3+3i) \cdot \text{ones}(10)$  του MATLAB. Το αριθμητικό πεδίο του  $A$  είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 2.2 και έχουμε μεταφέρει το σύστημα κατά  $\mu = 22.5 + i20$ .

Για την επίλυση του προβλήματος στο  $\mu = 22.5 + i20$ , η μέθοδος μας βρίσκει ένα γεννήτορα του  $\mu$  μετά από 4 διχοτομήσεις, αφού σύμφωνα με το Σχήμα 2.2 τότε εμφανίζονται γνωστοί γεννήτορες σημείων στον πραγματικό άξονα εκατέρωθεν του 0 και μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.1.1. Αν μετακινήσουμε το  $\mu$  πιο κοντά στο σύνορο του  $F(A)$  αυξάνοντας το πραγματικό του μέρος  $\text{Re}\{\mu\}$ , τότε τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

$\mu$	Crawford	R. Carden [10]			Ο αλγόριθμός μας		
		sec	ιδιοαν.	σφάλμα	sec	ιδιοαν.	σφάλμα
$22.83543 + i20$	$-5 \cdot 10^{-8}$	0.09	12	$8 \cdot 10^{-13}$	0.045	14	$10^{-15}$
$22.835430065 + i20$	$-3 \cdot 10^{-10}$	0.11	17	$5 \cdot 10^{-12}$	0.045	14	$3.6 \cdot 10^{-15}$
$22.8354300651 + i20$	$-2.4 \cdot 10^{-10}$	0.21	35	$3 \cdot 10^{-12}$	0.047	14	$10^{-15}$
$22.835430065417 + i20$	$-7 \cdot 10^{-13}$	*	*	*	0.049	16	$10^{-15}$
$22.835430065418 + i20$	$4 \cdot 10^{-13}$	*	*	*	$\mu$ εκτός του $F(A)$		

Πίνακας 3

Ο αριθμός Crawford δηλώνει τη μικρότερη απόσταση του  $\mu$  από το σύνορο του αριθμητικού πεδίου του πίνακα  $A - \mu I_{10}$ . Να σημειώσουμε ότι στη βιβλιογραφία ο αριθμός Crawford συναντάται και ως εσωτερική αριθμητική ακτίνα του αριθμητικού πεδίου. Εδώ υπολογίστηκε μέσω μιας μεθόδου του F. Uhlig [52, 53]. Όσο ο αριθμός Crawford ενός σημείου του αριθμητικού πεδίου  $\mu \in \mathbb{C}$  είναι αρνητικός, το σημείο αυτό βρίσκεται μέσα στο αριθμητικό πεδίο. Η τρίτη στήλη στον Πίνακα 3 παρουσιάζει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα που θα μπορούσαμε να έχουμε κάνοντας χρήση της μεθόδου του [10]. Αν το  $\mu$  το κάνουμε για παράδειγμα  $22.8354300652 + i20$ , η μέθοδος αυτή αποτυγχάνει, ενώ η δική μας δουλεύει με ακρίβεια 15 ψηφίων. Παρατηρούμε επίσης ότι αν και το 0 πλησιάζει το  $\partial F(A)$  σε κάθε γραμμή του Πίνακα 3, από απόσταση τάξης  $10^{-8}$  σε απόσταση τάξης  $10^{-13}$ , ο αριθμός των ιδιοαναλύσεων που χρειάζεται ο αλγόριθμός μας δεν αυξάνει σημαντικά. Η 5η γραμμή του Πίνακα 3 δείχνει ότι ο αλγόριθμός μας αποφαινεται ότι το  $\mu = 22.835430065418 + i20$  βρίσκεται εκτός του αριθμητικού πεδίου του  $A$  με απόσταση της τάξης  $4 \cdot 10^{-13}$  από το σύνορό του. Και για αυτό χρειάστηκαν επίσης 16 ιδιοαναλύσεις.

Το τελευταίο μας παράδειγμα προέρχεται από το [51, Παράδειγμα 7] και αναφέρεται στον  $188 \times 188$  πίνακα Jordan  $J$  της ιδιοτιμής  $1 + i3$  (με όλα τα στοιχεία της υπερδιαγωνίου ίσα με 1). Στο παράδειγμα αυτό και η μέθοδος του Carden [10] και η δική μας απαιτούν την επίλυση 3 ιδιοπροβλημάτων. Ο αλγόριθμός βρίσκει ένα γεννήτορα για το σημείο  $\mu = 1.707 + i3.707$  του αριθμητικού πεδίου  $F(A)$  σε απόσταση  $10^{-5}$  από το  $\partial F(A)$  σε 0.17 δευτερόλεπτα και με ακρίβεια τάξης  $10^{-17}$ , ενώ η μέθοδος του R. Carden [10] κάνει 0.2 δευτερόλεπτα με ακρίβεια  $9 \cdot 10^{-16}$ .

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο, σημειώνουμε ότι κατασκευάσαμε και αξιολογήσαμε έναν απλό γεωμετρικό αλγόριθμο για την εύρεση ενός μοναδιαίου διανύσματος που παράγει ένα δεδομένο σημείο στο εσωτερικό του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα. Επίσης, τον συγκρίναμε με τους δύο προϋπάρχοντες



αλγορίθμους για το ίδιο πρόβλημα και επιβεβαιώσαμε ότι ο η προτεινόμενη μεθο-  
δολογία είναι καλύτερή τους τόσο σε ταχύτητα όσο και σε ακρίβεια. Ο αλγόριθμος  
αυτός βασίστηκε στις γεωμετρικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου και το υπολο-  
γιστικό κόστος του, που είναι τάξης  $O(n^3)$ , προέρχεται από την αναγκαία επίλυση  
ιδιοπρόβλημάτων ερμιτιανών πινάκων.

Τέλος, θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί, γιατί σαν εναλλακτική λύση να  
μην αναζητήσουμε κάποια φανταστικά σημεία, εκτός απο πραγματικά σημεία, εκα-  
τέρωθεν του 0 και τους αντίστοιχους γεννητορές τους. Οι δοκιμές έδειξαν ότι στη  
συγκεκριμένη παραλλαγή της μεθόδου, με τον τρόπο αυτό αυξάνεται ελάχιστα η  
ταχύτητα, οπότε δεν υπάρχει νόημα στο να γίνει ειδική αναφορά.

## Κεφάλαιο 3

### Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας

#### 3.1 Προαπαιτούμενες Έννοιες

Όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 1.3, σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα  $(X, \|\cdot\|)$  ορίζουμε μια σχέση ορθογωνιότητας η οποία βασίζεται αποκλειστικά στη νόρμα  $\|\cdot\|$  του χώρου. Αυτή είναι η Birkhoff–James ορθογωνιότητα, όπου για δύο στοιχεία  $x, y \in X$  λέμε ότι το  $x$  είναι Birkhoff–James ορθογώνιο στο  $y$  και το συμβολίζουμε με  $x \perp_{BJ} y$ , αν και μόνο αν ισχύει  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Επιπλέον, έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό προσεγγιστικής ορθογωνιότητας [12, 14].

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  ένας χώρος με νόρμα και έστω  $x, y \in X$ . Για κάποιο  $\epsilon \in [0, 1)$  θα λέμε ότι το  $x$  είναι *Birkhoff–James ε–ορθογώνιο* στο  $y$  και το συμβολίζουμε με  $x \perp_{BJ}^\epsilon y$ , αν και μόνο αν  $\|x + \lambda y\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|x\|$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Στο συγκεκριμένο ορισμό βλέπουμε ότι όσο το  $\epsilon \in [0, 1)$  πλησιάζει τη μονάδα, τόσο το σύνολο των  $y$  που ικανοποιούν τη σχέση  $x \perp_{BJ}^\epsilon y$ , μεγαλώνει και αν επιτρέψουμε την τιμή  $\epsilon = 1$ , το σύνολο αυτό ταυτίζεται με ολόκληρο τον χώρο. Και η Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητα είναι ομογενής. Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε περίπτωση που ο χώρος  $X$  είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , τότε έχουμε την κλασική ορθογωνιότητα του εσωτερικού γινομένου,  $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$  και την ε–(προσεγγιστική)–ορθογωνιότητα που δίνει το εσωτερικό γινόμενο,  $x \perp_{BJ}^\epsilon y \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \epsilon \|x\| \|y\|$ . Τι σχέση υπάρχει όμως σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο, μεταξύ της Birkhoff–James ορθογωνιότητας, της Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητας και τις αντίστοιχες ορθογωνιότητες που ορίζονται από το εσωτερικό γινόμενο; Την απάντηση σε αυτό δίνει το παρακάτω λήμμα του S.S. Dragomir [14].

**Λήμμα 3.1.1.** Έστω  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Τότε η Birkhoff–James ορθογωνιότητα (αντίστοιχα, η Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητα)

ταυτίζεται με την ορθογωνιότητα (αντίστοιχα,  $\epsilon$ -ορθογωνιότητα) του εσωτερικού γινομένου, δεδομένου ότι η νόρμα που χρησιμοποιείται στον ορισμό των πρώτων επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του χώρου.

Όπως είναι γνωστό, η σχέση ορθογωνιότητας που ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρική ( $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$ ) και προσθετική ( $x_1 \perp y, x_2 \perp y \Rightarrow (x_1 + x_2) \perp y$ ). Άρα και η Birkhoff–James ορθογωνιότητα είναι συμμετρική και προσθετική όταν η νόρμα που την ορίζει επάγεται από εσωτερικό γινόμενο. Συγκεκριμένα ισχύει η επόμενη πρόταση [27].

**Πρόταση 3.1.2.** *Η Birkhoff–James ορθογωνιότητα είναι συμμετρική αν και μόνο αν η νόρμα του χώρου επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.*

## 3.2 Ένα Αριθμητικό Πεδίο για Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικούς Πίνακες

Είδαμε από το πρώτο κεφάλαιο (Πόρισμα 1.3.5) ότι το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  γράφεται στη μορφή

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\},$$

όπου  $\|\cdot\|_2$  είναι η φασματική νόρμα πίνακα και  $I_n$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας. Γενικεύουμε τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου στους όχι υποχρεωτικά τετραγωνικούς πίνακες, χρησιμοποιώντας στον παραπάνω ορισμό όχι κατ' ανάγκη την  $\|\cdot\|_2$  αλλά οποιαδήποτε νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$ .

**Ορισμός 3.2.1.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $\|\cdot\|$  μια νόρμα πίνακα. Ορίζουμε το αριθμητικό πεδίο του πίνακα  $A$  ως προς τον πίνακα  $B$  να είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\lambda, \|A - \lambda B\|). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι το αριθμητικό πεδίο του  $A$  ως προς τον  $B$  προκύπτει ως (υπεραριθμήσιμη) τομή κλειστών κυκλικών δίσκων. Επομένως, το σύνολο αυτό είναι κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, ιδιότητες που ισχύουν και στο κλασικό αριθμητικό πεδίο των τετραγωνικών πινάκων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι για κάθε νόρμα που χρησιμοποιούμε στον ορισμό, λαμβάνουμε και άλλο αριθμητικό πεδίο. Αν στον ορισμό θέσουμε  $\lambda = 0$ , τότε έχουμε ότι για κάθε  $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$ , ισχύει  $|\mu| \leq \|A\|$ .

Το πεδίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$  σχετίζεται με την Birkhoff–James ορθογωνιότητα, όπως δείχνει και το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.2.1.** *Για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\mu \in \|B\| = 1$ , ισχύει ότι*

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\}.$$

Απόδειξη. Εξ' ορισμού γνωρίζουμε ότι  $B \perp_{BJ} A$  αν και μόνο αν

$$\|B - \lambda A\| \geq \|B\| = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\|A - \lambda^{-1}B\| \geq |\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$0 \in F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\}, \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Από το Λήμμα 1.3.1 και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι για  $\|B\| = 1$  το χωρίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$  είναι μη κενό. Τι συμβαίνει γενικά όμως για διάφορες τιμές της ποσότητας  $\|B\|$ ;

**Θεώρημα 3.2.2.**  $F_{\|\cdot\|}(A; B) \neq \emptyset$  αν και μόνο αν  $\|B\| \geq 1$ .

Απόδειξη. Έστω  $\|B\| = \beta < 1$  και  $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$ . Τότε  $|\mu| \leq \|A\|$  και για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  έχουμε ότι  $|\mu| - |\lambda| \leq |\mu - \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$  και  $\|A - \lambda B\| \leq \|A\| + |\lambda|\beta$ . Επομένως, για  $\lambda \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $|\lambda| > |\mu|$ , έπεται ότι

$$|\lambda| - |\mu| \leq |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \leq \|A\| + |\lambda|\beta,$$

ή

$$(1 - \beta)|\lambda| \leq 2\|A\|.$$

Συνεπώς, για  $|\lambda| > \frac{2\|A\|}{1-\beta}$ , η προηγούμενη ανισότητα δεν ισχύει. Δηλαδή, με την υπόθεση ότι  $\|B\| < 1$  έχουμε ότι  $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \emptyset$ .

Αντίστροφα, αν αντικαταστήσουμε τον πίνακα  $B$  με  $bB$  για κάποιο μη μηδενικό  $b \in \mathbb{C}$ , τότε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; bB) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda(bB)\| \geq |\mu - \lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - (b\lambda)B\| \geq |b|^{-1}|b\mu - b\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |b|^{-1}|b\mu - \lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(α) Αν  $|b| = 1$ , τότε

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) = \{b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

(β) Αν  $|b| < 1$ , τότε

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) \subseteq \{b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

(γ) Αν  $|b| > 1$ , τότε

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) \supseteq \{b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Από το (β) και το γεγονός ότι η Birkhoff–James ορθογωνιότητα είναι ομογενής, έχουμε ότι για  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $\|B\| > 1$  ισχύει

$$\{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\} = \|B\|^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; \|B\|^{-1}B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Όμως από το Λήμμα 1.3.1 προκύπτει ότι  $F_{\|\cdot\|}(A; B) \neq \emptyset$ . □

### 3.3 Αναγκαιότητα του $B$

Ένα ερώτημα που θα μπορούσε να προκύψει αφορά στην παρουσία του πίνακα  $B$ . Γιατί δηλαδή χρησιμοποιούμε ένα γενικό πίνακα  $B$  και όχι, παρακινούμενοι από το κλασικό αριθμητικό πεδίο των τετραγωνικών πινάκων, μια “επέκταση” του μοναδιαίου πίνακα, για παράδειγμα της μορφής

$$I_{n,m} = \begin{cases} I_n, & n = m \\ \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}, & n < m \\ \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, & n > m \end{cases};$$

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται στην μελέτη που ακολουθεί. Θεωρούμε έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $n > m$ .

Θεωρούμε τη block μορφή του  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ , όπου  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  και  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$

και τον πίνακα  $I_{n,m} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ . Τότε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

όπου οι πίνακες  $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  είναι τετραγωνικοί  $n \times n$ . Επιπλέον, βλέπουμε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $M_1 \in \mathbb{C}^{m \times (n-m)}$  και  $M_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$ , ισχύει

$$\left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & M_1 \\ A_2 & M_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \right\|_2.$$

Έτσι, αν θέσουμε  $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$ , τότε έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) &\subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} \{ \mu \in \mathbb{C} : \|[A \ M] - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]). \end{aligned}$$

Όμως η τελευταία τομή ισούται με το αριθμητικό πεδίο  $F(A_1)$ , όπως δείχνει και παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 3.3.1.** Για κάθε  $n \times m$  ( $n > m$ ) πίνακα  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  με  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  και  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ , ισχύει ότι

$$F(A_1) = \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]).$$

*Απόδειξη.* Για κάθε  $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}$ ,  $F(A_1) \subseteq F([A \ M])$  και επομένως,

$$F(A_1) \subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]).$$

Λόγω της κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε  $\theta \in [0, 2\pi]$ , υπάρχει ένας  $n \times n$  πίνακας

$$[A \ M_\theta] = \begin{bmatrix} A_1 & M_1 \\ A_2 & M_2 \end{bmatrix}$$

τέτοιος ώστε τα αριθμητικά πεδία

$$F(e^{i\theta} A_1) = e^{i\theta} F(A_1) \quad \text{και} \quad F(e^{i\theta} [A \ M_\theta]) = e^{i\theta} F([A \ M_\theta])$$

να έχουν ακριβώς την ίδια προβολή στον πραγματικό άξονα (βλέπε Παράγραφο 1.4).

Για κάθε γωνία  $\theta \in [0, 2\pi]$ , θεωρούμε τον  $n \times n$  πίνακα

$$[A \ M_\theta] = \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}$$

για κάποιο  $\mu \in F(A_1)$ . Για τον συγκεκριμένο πίνακα, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^{i\theta} [A \ M_\theta] + e^{-i\theta} [A \ M_\theta]^*) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^* & e^{i(\pi-\theta)} A_2^* + e^{-i\theta} A_2^* \\ e^{i\theta} A_2 + e^{-i(\pi-\theta)} A_2 & e^{i\theta} \mu I_{n-m} + e^{-i\theta} \bar{\mu} I_{n-m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^*}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\{e^{i\theta} \mu\} I_{n-m} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta}\mu\} \in \operatorname{Re}\{F(e^{i\theta}A_1)\} = F\left(\frac{e^{i\theta}A_1 + e^{-i\theta}A_1^*}{2}\right).$$

Επομένως, τα αριθμητικά πεδία

$$F(e^{i\theta}A_1) \quad \text{και} \quad F\left(e^{i\theta} \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)}A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}\right)$$

έχουν ακριβώς την ίδια προβολή στον πραγματικό άξονα. □

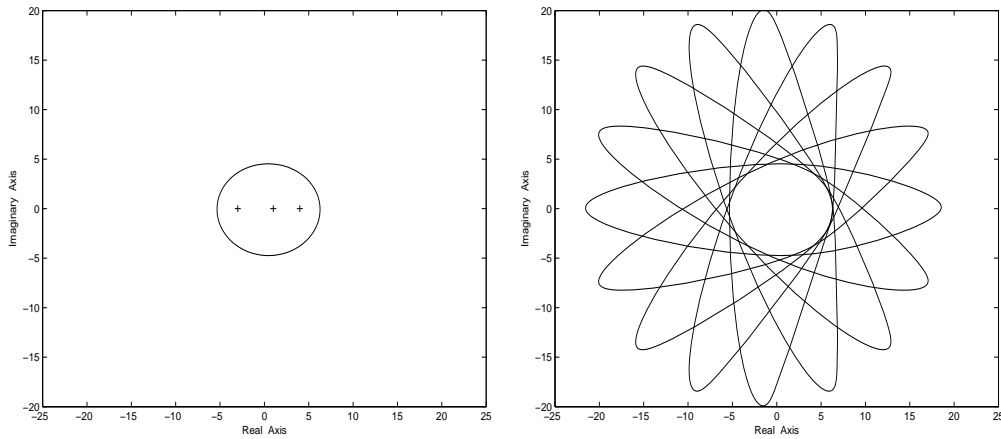
Από την προηγούμενη πρόταση έπεται άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.3.2.** Έστω  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$   $\mu \in A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  και  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ . Αν  $\mu \in F(A_1)$ , τότε

$$F(A_1) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} F\left(\begin{bmatrix} A_1 & e^{i\theta}A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}\right).$$

Για να επαληθεύσουμε το τελευταίο πόρισμα θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ i & 9 & 4 \\ -14 & 13 & -5 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 3.1: Τα πεδία  $F(A_1)$  (αριστερά) και  $F(C_k)$  για  $k = 0, 1, \dots, 7$  (δεξιά).

Το αριθμητικό πεδίο του  $3 \times 3$  υποπίνακα

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ i & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

φαίνεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 3.1 όπου με (+) σημειώνονται οι ιδιοτιμές του, ενώ στο δεξί φαίνονται τα αριθμητικά πεδία των πινάκων

$$C_k = \begin{bmatrix} A_1 & e^{i\frac{k\pi}{4}} A_2^* \\ A_2 & 0 \end{bmatrix},$$

που είναι σχεδιασμένα για  $k = 0, 1, \dots, 7$ .

Τέλος, η παραπάνω συζήτηση μας επιτρέπει να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, που αποτελεί στην ουσία και την απάντηση στο ερώτημα γιατί στο αριθμητικό πεδίο των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων χρησιμοποιούμε ένα γενικό πίνακα  $B$ .

**Θεώρημα 3.3.3.** Για κάθε  $n \times m$  ( $n > m$ ) πίνακα  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  με  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  και  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ , ισχύει ότι  $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) = F(A_1)$ .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι

$$F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) \subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]) = F(A_1).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω  $\mu_0 \in F(A_1)$ . Αφού  $F_{\|\cdot\|_2}(A - \mu_0 I_{n,m}; I_{n,m}) = F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) - \mu_0$  και  $F(A_1 - \mu_0 I_m) = F(A_1) - \mu_0$ , χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\mu_0 = 0$ . Έτσι έχουμε

$$0 \in F(A_1) = F_{\|\cdot\|_2}(A_1; I_m),$$

ή ισοδύναμα,

$$\|I_m - \lambda A_1\|_2 \geq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αφού όμως  $\|I_{n,m} - \lambda A\|_2 \geq \|I_m - \lambda A_1\|_2$ , έπεται ότι

$$\|I_{n,m} - \lambda A\|_2 \geq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|A - \lambda^{-1} I_{n,m}\|_2 \geq |\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

ή

$$\|A - \lambda I_{n,m}\|_2 \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς,  $0 \in F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m})$  και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι αν χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα της μορφής  $I_{n,m}$  και υπολογίσουμε το  $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m})$ , τότε αυτό ισούται με το κλασικό αριθμητικό πεδίο του κύριου υποπίνακα  $A_1$  του  $A$  το οποίο αποτελεί γνωστή και τετριμμένη περίπτωση που δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Έτσι αποφασίζουμε να χρησιμοποιούμε έναν γενικό  $n \times m$  πίνακα  $B$  αντί για τον  $I_{n,m}$ .



### 3.4 Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας.

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε ένα πεδίο, με την βοήθεια της Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητας το οποίο γενικεύει το  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ . Είδαμε ότι στην περίπτωση που  $\|B\| = 1$ , το αριθμητικό πεδίο του  $A$  ως προς τον  $B$  αποτελείται από εκείνα ακριβώς τα  $\mu \in \mathbb{C}$  για τα οποία ο  $B$  είναι Birkhoff–James ορθογώνιος στον  $A - \mu B$ . Τι συμβαίνει όμως για  $\|B\| > 1$ ; Παρατηρούμε ότι για  $\epsilon = \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - (\mu - \lambda)B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \frac{1}{\lambda}(A - \mu B) + B \right\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\lambda(A - \mu B) + B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_B^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_B} (A - \mu B)\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το αριθμητικό πεδίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$  είναι στην ουσία ένα σύνολο Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητας για τους πίνακες  $A$  και  $B$ , με  $\epsilon = \epsilon_B$ , για  $\|B\| > 1$ . Σημειώνουμε ότι όταν  $\|B\| = 1$ , τότε  $\epsilon_B = 0$  και τα παραπάνω επαληθεύονται από το Θεώρημα 3.2.1. Από τις παρατηρήσεις αυτές καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 3.4.1.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$ ,  $\|\cdot\|$  μια νόρμα πίνακα και  $\epsilon \in [0, 1)$ . Το σύνολο *Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητας* του πίνακα  $A$  ως προς τον πίνακα  $B$  ορίζεται να είναι το χωρίο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon} (A - \mu B)\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D} \left( \lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό παρατηρούμε ότι το σύνολο Birkhoff–James ε–ορθογωνιότητας  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, αφού γράφεται ως άπειρη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων της μορφής  $\mathcal{D} \left( \lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι περιέχεται πάντα στον κλειστό δίσκο  $\mathcal{D} \left( 0, \frac{\|A\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$ . Από το Λήμμα 1.3.1 φαίνεται ότι το  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  είναι πάντα μη κενό, για κάθε επιλογή των πινάκων  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Επιπλέον, ο Ορισμός 3.4.1 είναι εφαρμόσιμος στα στοιχεία οποιουδήποτε γραμμικού χώρου με νόρμα.

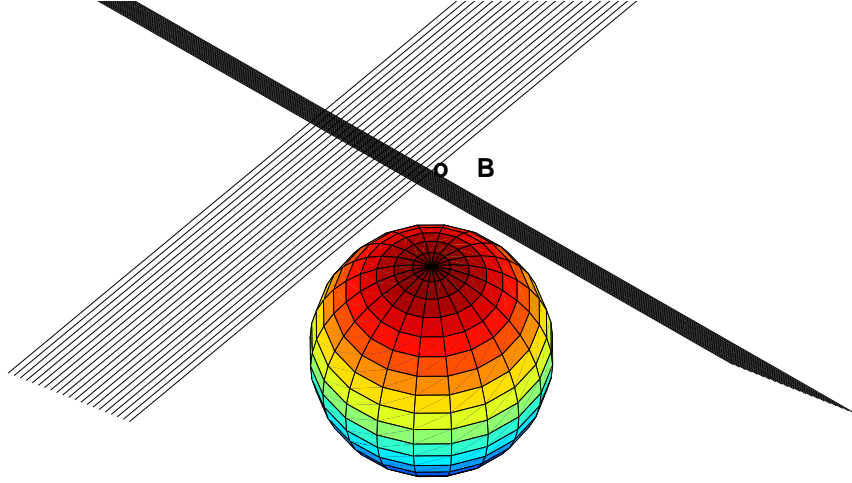
Πρέπει ακόμη να σημειώσουμε ότι τα σημεία  $\mu \in \mathbb{C}$  που ανήκουν στο χωρίο  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  έχουν μια αξιοσημείωτη γεωμετρική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B) \Leftrightarrow \|B + \lambda(A - \mu B)\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  αν και μόνο αν ο μονοδιάστατος (μιγαδικός) αφινικός χώρος  $\{B + \lambda(A - \mu B) : \lambda \in \mathbb{C}\}$  δεν τέμνει την ανοιχτή μπάλα

$$\text{Int}[\mathcal{B}(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|)] = \{M \in \mathbb{C}^{n \times m} : \|M\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|\},$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.2: Δύο αφινικοί χώροι που περιέχουν τον πίνακα  $B$  και δεν τέμνουν την ανοιχτή μπάλα  $\text{Int}[\mathcal{B}(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|)]$ .

Ένα σύνολο που γενικεύει το κλασικό αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πίνακα, όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο είναι το  $q$ -αριθμητικό πεδίο για  $q \in [0, 1]$ , που για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  είναι το σύνολο

$$F(A; q) = \{y^* A x \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, x^* x = y^* y = 1, y^* x = q\}.$$

Προφανώς, ισχύει ότι  $F(A; 1) = F(A)$ .

Οι Αικ. Αρετάκη και Ι. Μαρουλάς [2] όρισαν μια γενίκευση του  $q$ -αριθμητικού πεδίου για όχι υποχρεωτικά τετραγωνικούς πίνακες, παρόμοια με τον ορισμό του  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ . Συγκεκριμένα, για  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$ ,  $q \in [0, 1]$  και μια νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$ , όρισαν το  $q$ -αριθμητικό πεδίο του  $A$  ως προς τον  $B$  να είναι το κυρτό και συμπαγές σύνολο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B; q) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - q\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(q\lambda, \|A - \lambda B\|). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Επιπλέον, έδειξαν ότι

$$\frac{1}{q_2} F_{\|\cdot\|}(A; B; q_2) \subseteq \frac{1}{q_1} F_{\|\cdot\|}(A; B; q_1), \quad 0 < q_1 < q_2 \leq 1 \quad (3.4.2)$$

και ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B; q) = F_{\|\cdot\|}(A; q^{-1}B), \quad 0 < q \leq 1. \quad (3.4.3)$$

Από την τελευταία σχέση και το Θεώρημα 3.2.2 έπεται ότι το  $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$  είναι μη κενό αν και μόνο αν  $\|B\| \geq q$  ( $0 < q \leq 1$ ).

Στη συνέχεια, θα συναντάμε συχνά την υπόθεση ότι ο πίνακας  $A$  δεν είναι (βαθμωτό) πολλαπλάσιο του  $B$ , όπου θα θεωρούμε ότι και ο μηδενικός πίνακας είναι πολλαπλάσιο του  $B$ .

**Πρόταση 3.4.1.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$  και  $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ . Αν ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ , τότε  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$  και επιπλέον το σύνολο  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$ .

Απόδειξη. Για κάθε  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$ , έχουμε ότι

$$\|A - \mu B + (\mu - \lambda)B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|\lambda B + A - \mu B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\lambda| > \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αφού όμως ο  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$\delta \leq \min \left\{ \min_{|\lambda| \leq 1} \left\{ \|\lambda B + A - \mu B\| - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda| \right\}, \left( \sqrt{1 - \epsilon_1^2} - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \right) \|B\| \right\},$$

ή

$$\delta \leq \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|\lambda B + A - \mu B\| - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda| \right\}.$$

Συνεπώς, για κάθε  $\xi \in \mathcal{D}(0, \delta/\|B\|)$ ,

$$\|\lambda B + A - (\mu + \xi)B\| \geq \|\lambda B + A - \mu B\| - \|\xi B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

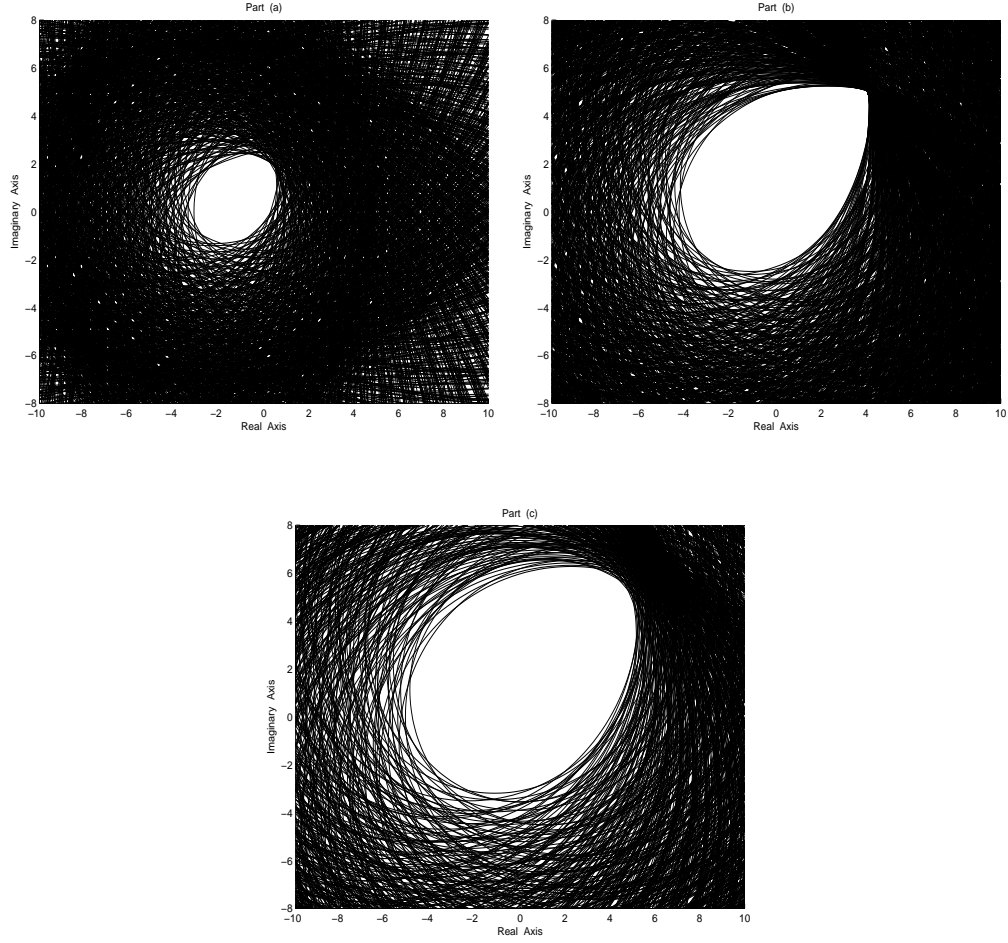
Επομένως, το χωρίο  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$ .  $\square$

Από την παραπάνω πρόταση, άμεσα έπεται το επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.4.2.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  όπου  $B \neq 0$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε για κάθε  $\epsilon \in (0, 1)$ , το  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  έχει μη κενό εσωτερικό και δεν γίνεται να είναι ευθύγραμμο τμήμα ή μονοσύνολο.

Ως παράδειγμα θεωρούμε τους  $3 \times 4$  μιγαδικούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 4 + i5 & 0 & i & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.3: Τα σύνολα  $F_{\|\cdot\|_2}^{0.5}(A; B)$  (πάνω αριστερά),  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B)$  (πάνω δεξιά) και  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B)$  (κάτω).

με  $\|B\|_2 = \sqrt{2}$ . Τα σύνολα  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $F_{\|\cdot\|_2}^{0.5}(A; B)$ ,  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B)$  και  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B)$  φαίνονται ως λευκές περιοχές στα τρία μέρη του Σχήματος 3.3 και επιβεβαιώνουν την Πρόταση 3.4.1 κατά προφανή τρόπο. Σημειώνουμε επίσης ότι  $\sqrt{0.5} = \sqrt{\|B\|_2^2 - 1} / \|B\|_2$  και  $\sqrt{0.6} = \sqrt{\|B\|_2^2 - \sqrt{0.8}^2} / \|B\|_2$ . Επομένως, από το Θεώρημα 3.4.4 έπεται ότι  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B) = F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$  καθώς επίσης και ότι  $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B) = F_{\|\cdot\|_2}(\sqrt{0.8}^{-1}A; B; \sqrt{0.8}) = F_{\|\cdot\|_2}(\sqrt{0.8}^{-1}A; \sqrt{0.8}^{-1}B)$ .

Από τον ορισμό έχουμε δει ότι το  $\epsilon \in [0, 1)$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή  $\epsilon = 1$ . Αν όμως για χάρη της πληρότητας, στον Ορισμο 3.4.1 θέσουμε  $\epsilon = 1$ , τότε προκύπτει ότι  $F_{\|\cdot\|}^1(A; B) = \mathbb{C}$ . Φαίνεται λοιπόν ότι το  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε καθώς  $\epsilon \rightarrow 1$ , το οποίο επαληθεύεται και από την πρόταση που ακολουθεί.

**Πρόταση 3.4.3.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  όπου  $B \neq 0$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε για κάθε φραγμένο χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , υπάρχει ένα  $\epsilon_\Omega \in [0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\Omega \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(A; B)$ .

*Απόδειξη.* Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το  $\Omega$  είναι συμπαγές, διότι και αν δεν είναι, μπορούμε να θεωρήσουμε την κλειστή του θήκη. Έστω τώρα ένα  $\mu \in \Omega$  τέτοιο ώστε  $\mu \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$ . Τότε για κάθε  $\epsilon_k = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , υπάρχει ένα  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  ώστε

$$\|A - (\mu - \lambda_k)B\| < \sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}\right)^2} \|B\| |\lambda_k|,$$

ή

$$\|\lambda_k B + A - \mu B\| < \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k|, \quad (3.4.4)$$

ή

$$|\|\lambda_k B\| - \|A - \mu B\|| < \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k|.$$

Αν  $|\lambda_k| \|B\| < \|A - \mu B\|$ , τότε  $|\lambda_k| < \|A - \mu B\| / \|B\|$ . Αν όχι, τότε

$$|\lambda_k| \|B\| \left(1 - \frac{1}{k}\right) < \|A - \mu B\| \leq \|A\| + |\mu| \|B\|,$$

ή

$$|\lambda_k| < \frac{\|A\| + |\mu| \|B\|}{\|B\| \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \leq 2 \frac{\|A\| + |\mu| \|B\|}{\|B\|}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ακολουθία  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  είναι πάντα φραγμένη, επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της. Υποθέτουμε ότι αυτή η υπακολουθία είναι η  $\{\lambda_{k_t}\}_{k_t \in \mathbb{N}}$  και έστω  $\lambda_{k_t} \rightarrow \lambda_0$ . Τότε από την ανισότητα (3.4.4) έχουμε ότι

$$\|\lambda_{k_t} B + A - \mu B\| < \frac{1}{k_t} \|B\| |\lambda_{k_t}|, \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

ή

$$\lim_t \|\lambda_{k_t} B + A - \mu B\| = 0,$$

ή

$$\|\lambda_0 B + A - \mu B\| = 0,$$

άτοπο αφού ο  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Επομένως, υπάρχει ένα  $\epsilon_\mu$  τέτοιο ώστε  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)$  και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\mu \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)]$  απλά επιλέγοντας ένα μεγαλύτερο  $\epsilon_\mu$ . Έτσι έχουμε ότι  $\Omega \subseteq \bigcup_{\mu \in \Omega} \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)]$ . Όμως το  $\Omega$  είναι συμπαγές και το σύνολο  $\bigcup_{\mu \in \Omega} \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)]$

είναι μια ανοιχτή κάλυψή του. Άρα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή για  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \in \Omega$  ισχύει ότι  $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^s \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_{\mu_i}}(A; B)]$ . Θέτοντας  $\epsilon_\Omega = \max\{\epsilon_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, s\}$ , η προηγούμενη πρόταση ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Όπως αναφέραμε στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου, για  $\|B\| \geq 1$  και  $\epsilon_B = \sqrt{\|B\|^2 - 1} / \|B\|$ , το σύνολο  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$  συμπίπτει με το αριθμητικό πεδίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ . Επίσης εύκολα επιβεβαιώνεται ότι

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\mu}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \left| \mu - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \lambda \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \left| \mu - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \lambda \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.5.2 που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο και της σχέσης (3.4.3), έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

**Θεώρημα 3.4.4.** Για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$  και  $\epsilon \in [0, 1)$ , έπεται ότι

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = F_{\|\cdot\|}(q_\epsilon^{-1}A; B; q_\epsilon) = F_{\|\cdot\|}(q_\epsilon^{-1}A; q_\epsilon^{-1}B),$$

όπου  $q_\epsilon = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ . Ισοδύναμα, για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $q \in (0, 1]$ , με  $\|B\| \geq q$ ,

$$F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_q}(A; B) = F_{\|\cdot\|}(q^{-1}A; B; q) = F_{\|\cdot\|}(q^{-1}A; q^{-1}B),$$

όπου  $\epsilon_q = \sqrt{\|B\|^2 - q^2} / \|B\|$ .

**Πόρισμα 3.4.5.** Για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $q \in (0, 1]$ , με  $\|B\| = q$ , έπεται ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B; q) = F_{\|\cdot\|}^0(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\}.$$

Αναφορικά με το  $q$ -αριθμητικό πεδίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$ , τα παραπάνω αποτελέσματα μας πληροφορούν για το ότι η Πρόταση 3.4.1 αποτελεί γενίκευση της σχέσης (3.4.2).

## 3.5 Βασικές Ιδιότητες

Στη συνέχεια προχωράμε στην παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων των συνόλων  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας.

**Πρόταση 3.5.1.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$ . Αν  $A = bB$  για κάποιο  $b \in \mathbb{C}$ , τότε ισχύει  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\}$ .

Απόδειξη. Για  $A = bB$  και  $b \in \mathbb{C}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|bB - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|B\| |b - \lambda| \geq |\mu - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Αφού  $\frac{\|B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \geq 1$ , είναι προφανές ότι  $\|B\| |b - \lambda| \geq |b - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ , άρα  $b \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$ . Έστω τώρα  $\hat{b} \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) \setminus \{b\}$ . Τότε στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα  $b$  και  $\hat{b}$  υπάρχει ένα σημείο  $\lambda_0$  τέτοιο ώστε  $\frac{\|B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} |b - \lambda_0| < |\hat{b} - \lambda_0|$ , δηλαδή  $\hat{b} \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$ . Άτοπο, επομένως  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\}$ .  $\square$

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων τότε το  $F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$  για κάθε επιλογή των πινάκων  $A$  και  $B \neq 0$  είναι πάντα μονοσύνολο (βλέπε Πρόταση 3.5.8 παρακάτω).

**Πρόταση 3.5.2.** Για τυχαίους αριθμούς  $a, b \in \mathbb{C}$ , ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(aA + bB; B) = aF_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + b.$$

Απόδειξη. Έστω  $a \neq 0$ . Τότε ο μιγαδικός  $a\mu + b$  ανήκει στο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(aA + bB; B)$  αν και μόνο αν

$$\|aA + bB - \lambda B\| \geq |a\mu + b - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|a| \left\| A + \frac{b - \lambda}{a} B \right\| \geq |a| \left| \mu + \frac{b - \lambda}{a} \right| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως  $a\mu + b \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(aA + bB; B)$  αν και μόνο αν  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .

Αν  $a = 0$ , τότε  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(aA + bB; B) = F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\}$ .  $\square$

**Πρόταση 3.5.3.** Αν  $A \neq 0$ , τότε ισχύει

$$\{\mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), |\mu| \geq \|A\|/\|B\|\} \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(B; A).$$

Απόδειξη. Έστω  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  με  $|\mu| \geq \frac{\|A\|}{\|B\|}$ . Τότε έχουμε

$$\|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$|\lambda| \left\| \frac{1}{\lambda} A - B \right\| \geq |\lambda| \left| \frac{\mu}{\lambda} - 1 \right| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

ή ισοδύναμα,

$$\|B - \lambda A\| \geq |\mu \lambda - 1| = |\mu| |\mu^{-1} - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αφού όμως  $|\mu| \geq \frac{\|A\|}{\|B\|}$ , έπεται ότι  $\mu^{-1} \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(B; A)$ . □

**Πρόταση 3.5.4.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Τότε ισχύει

$$\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)] \subseteq \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω  $\mu \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$ . Τότε υπάρχει  $\rho > 0$  τέτοιο ώστε  $\mu + e^{i\theta} \rho \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  για κάθε  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Άρα, έχουμε

$$\|A - \lambda B\| \geq |(\mu + e^{i\theta} \rho) - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Όμως για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ , υπάρχει γωνία  $\theta(\lambda) \in [0, 2\pi]$  κατάλληλη ώστε

$$|(\mu + e^{i\theta(\lambda)} \rho) - \lambda| > |\mu - \lambda|.$$

Συνεπώς,  $\|A - \lambda B\| > |\mu - \lambda| \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ . □

**Πρόταση 3.5.5.** Έστω ότι  $f : (\mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}^{n_2 \times m_2}, \|\cdot\|)$  είναι μια γραμμική απεικόνιση  $\|f(M)\| = (\geq, \leq) \|M\|$  για κάθε  $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ . Τότε για κάθε  $A, B \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ , ισχύει  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(f(A); f(B)) = (\supseteq, \subseteq) F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι  $\|M\| \leq \|f(M)\|$  για κάθε  $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$  και έστω  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Τότε για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \leq \|f(A - \lambda B)\| = \|f(A) - \lambda f(B)\|,$$

άρα,  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(f(A); f(B))$ . Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες δύο περιπτώσεις. □

Στην περίπτωση που η νόρμα που χρησιμοποιούμε στον ορισμό του συνόλου Birkhoff–James ε-ορθογωνιότητας επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων (όπως για παράδειγμα η νόρμα Frobenius  $\|\cdot\|_F$ ), τότε το χωρίο αυτό είναι κυκλικός δίσκος. Πρίν προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτού, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τα παρακάτω λήμματα, που θα χρειαστούν. Το πρώτο λήμμα είναι ειδική περίπτωση του Λήμματος 3.1.1 και για λόγους πληρότητας, δίνεται μια απλή απόδειξη.



**Λήμμα 3.5.6.** Έστω ότι η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο πινάκων  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Τότε είναι  $A \perp_{BJ} B$  αν και μόνο αν  $\langle A, B \rangle = 0$ .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι  $A \perp_{BJ} B$  αν και μόνο αν

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2 \operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \langle A, B \rangle\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Όμως για  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2 \operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \langle A, B \rangle\} = -2 \lambda \operatorname{Re}\{\langle A, B \rangle\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 = |\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2 \operatorname{Re}\{i\bar{\lambda} \langle A, B \rangle\} = -2 \lambda \operatorname{Im}\{\langle A, B \rangle\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,  $\operatorname{Re}\{\langle A, B \rangle\} = \operatorname{Im}\{\langle A, B \rangle\} = 0$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Λήμμα 3.5.7.** Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Τότε  $\langle A, B \rangle / \|B\|^2 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Επιπλέον, αν  $\epsilon = 0$ , τότε  $F_{\|\cdot\|}^0(A; B) = \left\{ \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \right\}$ .

Απόδειξη. Όταν η νόρμα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, για ένα  $\mu \in \mathbb{C}$  ισχύει  $B \perp (A - \mu B)$  αν και μόνο αν  $\langle B, A - \mu B \rangle = 0$ , ισοδύναμα, αν και μόνο αν  $\mu = \langle A, B \rangle / \|B\|^2$ . Από το Θεώρημα 3.4.5 και το γεγονός ότι

$$\{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\} = \|B\|^{-1} F_{\|\cdot\|}(A; \|B\|^{-1} B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B),$$

η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Θεώρημα 3.5.8.** Αν η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο πινάκων  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , τότε

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \mathcal{D} \left( \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Απόδειξη. Θα παρουσιάσουμε δύο αποδείξεις για το θεώρημα αυτό.

*Πρώτη απόδειξη.* Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο πινάκων  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Όπως είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου (Λήμμα 3.1.1), η Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητα ταυτίζεται με την  $\epsilon$ -ορθογωνιότητα του εσωτερικού γινομένου. Άρα ένα  $\mu \in \mathbb{C}$  ανήκει στο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  αν και μόνο αν

$$B \perp^\epsilon (A - \mu B),$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|\langle B, A - \mu B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|A - \mu B\|,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\langle B, A - \mu B \rangle \langle A - \mu B, B \rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \langle A - \mu B, A - \mu B \rangle,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\frac{|\langle A, B \rangle|^2}{\|B\|^4} - \mu \frac{\langle B, A \rangle}{\|B\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} + |\mu|^2 \leq \epsilon^2 \left( \frac{\|A\|^2}{\|B\|^2} - \mu \frac{\langle B, A \rangle}{\|B\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} + |\mu|^2 \right),$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\left| \mu - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \right|^2 (1 - \epsilon^2) \leq \frac{\epsilon^2}{\|B\|^2} \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\|^2.$$

Άρα το  $\mu$  ανήκει στο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  αν και μόνο αν είναι σημείο του κυκλικού δίσκου

$$\mathcal{D} \left( \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Δεύτερη απόδειξη. Αν  $\epsilon = 0$ , τότε από το Λήμμα 3.5.7,  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \{\langle A, B \rangle\} = \mathcal{D}(\langle A, B \rangle, 0)$ .

Έστω τώρα ότι  $\epsilon > 0$ . Θέτουμε  $\hat{A} = A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B$  και παρατηρούμε ότι

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\hat{A}; B) = F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \quad \text{και} \quad \langle \hat{A}, B \rangle = 0.$$

Έτσι για κάθε  $r > 0$ , έχουμε

$$\frac{\|\hat{A} - re^{i\theta} B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2}, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{D} \left( re^{i\theta}, \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \|\hat{A} - re^{i\theta} B\| \right) \\ &= \mathcal{D} \left( 0, \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2} - r \right). \end{aligned}$$

Άμεσα επίσης βλέπουμε ότι

$$\min_{r \geq 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2} - r \right\} = \|\hat{A}\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|},$$

όπου το ελάχιστο λαμβάνεται για

$$r = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|\hat{A}\|}{\epsilon \|B\|}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\hat{A}; B) &= \bigcap_{r \geq 0} \mathcal{D} \left( 0, \frac{\sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2} - r}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right) \\ &= \mathcal{D} \left( 0, \|\hat{A}\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

### 3.6 Συνέχεια

Είναι γνωστό ότι το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα είναι συνεχής απεικόνιση ως προς προς τα στοιχεία του πίνακα [35]. Για το σύνολο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  προκύπτουν διάφορα ερωτήματα σχετικά με την ιδιότητα της συνέχειας, καθώς το σύνολο αυτό εξαρτάται τόσο από τους πίνακες  $A$  και  $B$  όσο και από την πραγματική παράμετρο  $\epsilon$ . Για παράδειγμα, είναι το  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  συνεχές ως προς τον πίνακα  $A$  ή τον πίνακα  $B$  ή το  $\epsilon$ ; Μήπως είναι τελικά συνεχές ως προς την τριάδα  $(A, B, \epsilon) \in \mathbb{C}^{n \times m} \times \mathbb{C}^{n \times m} \times [0, 1]$ ; Όλες οι παραπάνω μορφές συνέχειας θεωρούνται με βάση την μετρική Hausdorff, που για δύο συμπαγή υποσύνολα  $\Omega_1, \Omega_2$  ενός μετρικού χώρου  $(X, d)$  ορίζεται ως εξής:

$$\rho_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max \left\{ \max_{a \in \Omega_1} \min_{b \in \Omega_2} d(a, b), \max_{b \in \Omega_2} \min_{a \in \Omega_1} d(a, b) \right\}.$$

Για ότι ακολουθεί, χρήσιμοι είναι και οι παρακάτω ορισμοί.

**Ορισμός 3.6.1.** Έστω απεικόνιση  $F : X \mapsto Y$ , όπου  $X$  μετρικός χώρος και  $Y$  πλήρης μετρικός χώρος και  $\rho_y(\cdot, \cdot)$  η μετρική του  $Y$ . Έστω  $\mathcal{B}_\delta(0) = \{x \in Y : \rho_y(0, x) \leq \delta\}$ .

(i) Θα λέμε ότι η  $F$  είναι  $\delta$ -άνω ημισυνεχής σε ένα σημείο  $t_0 \in X$  αν για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει περιοχή  $U(t_0) \subset X$  του  $t_0$ , τέτοια ώστε για κάθε  $t \in U(t_0)$  είναι  $F(t) \subset F(t_0) + \mathcal{B}_\delta(0)$ .

(ii) Θα λέμε ότι η  $F$  είναι  $\delta$ -κάτω-ημισυνεχής σε ένα σημείο  $t_0 \in X$  αν για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει περιοχή  $U(t_0) \subset X$  του  $t_0$ , τέτοια ώστε για κάθε  $t \in U(t_0)$  είναι  $F(t_0) \subset F(t) + \mathcal{B}_\delta(0)$ .

**Ορισμός 3.6.2.** Έστω απεικόνιση  $F : X \mapsto Y$ , όπου  $X$  μετρικός χώρος και  $Y$  πλήρης μετρικός χώρος και  $\rho_y(\cdot, \cdot)$  η μετρική του  $Y$ .

(i) Θα λέμε ότι η  $F$  είναι *άνω ημισυνεχής* σε ένα σημείο  $t_0 \in X$  αν για κάθε περιοχή  $U(F(t_0)) \subset Y$  του  $F(t_0)$ , υπάρχει περιοχή  $U(t_0) \subset X$  του  $t_0$ , τέτοια ώστε

$$F(t) \subset U(F(t_0)), \quad \forall t \in U(t_0).$$

(ii) Θα λέμε ότι η  $F$  είναι *κάτω-ημισυνεχής* σε ένα σημείο  $t_0 \in X$  αν για κάθε  $y_0 \in F(t_0)$  και κάθε περιοχή  $U(y_0) \subset Y$  του  $y_0$ , υπάρχει περιοχή  $U(t_0) \subset X$  του  $t_0$ , τέτοια ώστε

$$F(t) \cap U(y_0) \neq \emptyset, \quad \forall t \in U(t_0).$$

Οι έννοιες της δ-άνω (αντίστοιχα, δ-κάτω) ημισυνέχειας και της άνω (αντίστοιχα, κάτω) ημισυνέχειας ταυτίζονται στην περίπτωση των συμπαγών συνόλων, όπως δείχνει και το παρακάτω λήμμα [3].

**Λήμμα 3.6.1.** Έστω απεικόνιση  $F : X \mapsto Y$ , όπου  $X$  μετρικός χώρος και  $Y$  πλήρης μετρικός χώρος και  $\rho_y(\cdot, \cdot)$  η μετρική του  $Y$ .

(i) Αν η  $F$  είναι άνω ημισυνεχής σε ένα σημείο  $t_0 \in X$ , τότε είναι και δ-άνω ημισυνεχής. Το αντίστροφο ισχύει αν  $F(t_0)$  συμπαγές.

(ii) Αν η  $F$  είναι δ-κάτω ημισυνεχής σε ένα σημείο  $t_0 \in X$ , τότε είναι και κάτω ημισυνεχής. Το αντίστροφο ισχύει αν  $F(t_0)$  συμπαγές.

Συνέχεια σε ένα σημείο  $t_0$ , ως προς τη Hausdorff μετρική για μια απεικόνιση  $F$  όπως πριν, σημαίνει ότι η  $F$  είναι ταυτόχρονα δ-άνω και δ-κάτω ημισυνεχής στο  $t_0$ . Αν το  $F(t_0)$  είναι συμπαγές, τότε από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι συνέχεια ως προς τη Hausdorff μετρική σημαίνει ταυτόχρονα άνω και κάτω ημισυνέχεια. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  είναι άνω ημισυνεχές ως προς  $A$ . Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής χρειαζόμαστε και το επόμενο λήμμα [32].

**Λήμμα 3.6.2.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχουν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  τέτοια ώστε

$$\rho_H \left( \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D} \left( \lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) \right) \leq \delta.$$

**Πρόταση 3.6.3.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε η απεικόνιση

$$A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$$

είναι άνω ημισυνεχής.

Απόδειξη. Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και έστω  $\delta/2 > 0$ . Τότε από το Λήμμα 3.6.2 υπάρχουν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  τέτοια ώστε αν  $G(A) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D} \left( \lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$  να ισχύει  $\rho_H(G(A), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) \leq \delta/2$ . Όμως, για κάθε  $E \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , ισχύει

$$\frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} = \frac{\|A + E - \lambda_i B - E\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \leq \frac{\|A + E - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} + \frac{\|E\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}$$

για  $i = 1, 2, \dots, k$ . Επομένως, το σύνολο

$$\Omega(A) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D} \left( \lambda_i, \frac{\|A + E - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} + \frac{\|E\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right),$$

περιέχει το

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A + E; B) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D} \left( \lambda, \frac{\|A + E - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Από [44](Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 7, Θεώρημα 3), υπάρχει ένα  $\gamma > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $E \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $\|E\| \leq \gamma$  να είναι  $\rho_H(G(A), \Omega(A)) \leq \delta/2$ . Επομένως, για κάθε  $E \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $\|E\| \leq \gamma$  έχουμε ότι

$$\rho_H(F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), \Omega(A)) \leq \rho_H(F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), G(A)) + \rho_H(G(A), \Omega(A)) \leq \delta.$$

Αυτό σημαίνει ότι  $\Omega(A) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + \mathcal{D}(0, \delta)$ , άρα και ότι  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A + E; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + \mathcal{D}(0, \delta)$ , που σημαίνει ότι η  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\cdot; B)$  είναι  $\delta$ -άνω ημισυνεχής, άρα από το Λήμμα 3.6.1, είναι και άνω ημισυνεχής.  $\square$

Για την παράμετρο  $\epsilon \in [0, 1)$  ισχύει η ιδιότητα της συνέχειας, όπως αποκαλύπτουν τα παρακάτω. Σημειώνουμε ότι στη περίπτωση που ο πίνακας  $A$  είναι (βαθμωτό) πολλαπλάσιο του πίνακα  $B$ , τότε το χωρίο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  διατηρείται (σταθερό) μονοσύνολο για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$ . Επομένως, στη περίπτωση αυτή η απεικόνιση  $\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  είναι συνεχής κατά τερμιμένο τρόπο.

**Πρόταση 3.6.4.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε η απεικόνιση

$$\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B),$$

για  $\epsilon \in [0, 1)$ , είναι άνω ημισυνεχής.

Απόδειξη. Έστω τυχαίο  $\epsilon \in [0, 1)$ . Αρκεί να δείξω ότι για κάθε  $\delta > 0$  υπάρχει περιοχή του  $\epsilon$ ,  $\mathcal{U}(\epsilon)$  τέτοια ώστε να ισχύει  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + \mathcal{D}(0, \delta)$ . Για  $\hat{\epsilon} \in \mathcal{U}(\epsilon)$  με  $\hat{\epsilon} < \epsilon$ , ο εγκλεισμός που θέλουμε να αποδείξουμε προφανώς ισχύει. Αυτό διότι για  $\hat{\epsilon} < \epsilon$  είναι  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  από την Πρόταση 3.4.1. Άρα θεωρούμε ότι  $\hat{\epsilon} > \epsilon$ . Ορίζουμε το σύνολο

$$G(\epsilon) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D} \left( \lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right),$$

με  $\rho_H(G(\epsilon), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) < \delta/2$ , από το Λήμμα 3.6.2. Όμως από [44](Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 7, Θεώρημα 3), υπάρχει  $\hat{\epsilon}$  κοντά στο  $\epsilon$  τέτοιο ώστε  $\rho_H(G(\epsilon), G(\hat{\epsilon})) < \delta/2$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \rho_H(G(\hat{\epsilon}), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) &\leq \rho_H(G(\hat{\epsilon}), G(\epsilon)) + \rho_H(G(\epsilon), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) \\ &< \delta/2 + \delta/2 = \delta. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $G(\hat{\epsilon}) \subset F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + \mathcal{D}(0, \delta)$ . Όμως είναι  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subseteq G(\hat{\epsilon})$ , που σημαίνει ότι

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + \mathcal{D}(0, \delta),$$

δηλαδή ότι το  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  είναι  $\delta$ -άνω ημισυνεχές ως προς  $\epsilon$ , άρα και άνω ημισυνεχές.  $\square$

**Πρόταση 3.6.5.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε η απεικόνιση

$$\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B),$$

για  $\epsilon \in [0, 1)$ , είναι κάτω ημισυνεχής.

*Απόδειξη.* Έστω  $\epsilon \in [0, 1)$  και τυχαίο  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε περιοχή του  $\mu$  της μορφής  $\mathcal{D}(\mu, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , υπάρχει περιοχή  $\mathcal{U}(\epsilon) = (\epsilon - \xi, \epsilon + \xi)$ ,  $\xi > 0$ , τέτοια ώστε για κάθε  $\hat{\epsilon} \in (\epsilon - \xi, \epsilon + \xi)$  να ισχύει  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap \mathcal{D}(\mu, \delta) \neq \emptyset$ . Όμως, από την Πρόταση 3.4.1, για  $\hat{\epsilon} \in [\epsilon, \epsilon + \xi)$  έχουμε ότι  $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B)$ . Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε τι γίνεται για  $\hat{\epsilon} \in (\epsilon - \xi, \epsilon)$ , όπου  $\epsilon \in (0, 1)$ . Αν για κάποιο  $\hat{\epsilon} < \epsilon$  ισχύει ότι  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap \mathcal{D}(\mu, \delta) \neq \emptyset$ , τότε λόγω της ιδιότητας  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B) \subset \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)]$  για  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , θα έχουμε δημιουργήσει την ζητούμενη περιοχή του  $\epsilon$ .

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε για άτοπο, ότι υπάρχει  $\delta_0 > 0$  τέτοιο ώστε  $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap \mathcal{D}(\mu, \delta_0) = \emptyset$ , για κάθε  $\hat{\epsilon} < \epsilon$ . Επομένως, υπάρχουν γωνίες  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$  τέτοιες ώστε  $\mu_0 + \delta_0 e^{i\theta} \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$ , για κάθε  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , ενώ ταυτόχρονα υπάρχει  $\lambda_{\mu, \delta_0, \theta} \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε

$$|\mu + \delta_0 e^{i\theta} - \lambda_{\mu, \delta_0, \theta}| > \frac{\|A - \lambda_{\mu, \delta_0, \theta} B\|}{\sqrt{1 - \hat{\epsilon}^2} \|B\|},$$

για κάθε  $\hat{\epsilon} < \epsilon$ .

Έστω τώρα μια ακολουθία  $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με  $0 < \epsilon_n < \epsilon$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \rightarrow \epsilon$ . Τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , υπάρχει  $\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}$  έτσι ώστε

$$|\mu + \delta_0 e^{i\theta} - \lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| > \frac{\|A - \lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta} B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_n^2} \|B\|} \quad (3.6.1)$$

ή

$$|\mu + \delta_0 e^{i\theta}| + |\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| > \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon_n^2} \|B\|} \left| \|A\| - \|B\| |\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| \right|$$

Αν  $|\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| \|B\| < \|A\|$ , τότε έχουμε  $|\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| < \|A\| / \|B\|$ . Αν όχι, τότε

$$|\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| \|B\| - \|A\| < \sqrt{1 - \epsilon_n^2} \|B\| (|\mu + \delta_0 e^{i\theta}| + |\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}|)$$

και αφού  $\epsilon_n > 0$ , προκύπτει ότι

$$|\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}| < \frac{\|A\| + \sqrt{1 - \epsilon_n^2} \|B\| |\mu + \delta_0 e^{i\theta}|}{\|B\| (1 - \sqrt{1 - \epsilon_n^2})}.$$

Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.4.3, η ακολουθία  $\lambda_n^{\mu, \delta_0, \theta}$  είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία  $\lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta}$ , με  $\lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta} \rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{C}$ , καθώς  $t_n \rightarrow \infty$ . Τότε η σχέση (3.6.1) γίνεται

$$|\mu + \delta_0 e^{i\theta} - \lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta}| > \frac{\|A - \lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta} B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_{t_n}^2} \|B\|},$$

επομένως,

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} |\mu + \delta_0 e^{i\theta} - \lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta}| \geq \lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{\|A - \lambda_{t_n}^{\mu, \delta_0, \theta} B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_{t_n}^2} \|B\|}$$

ή

$$|\mu + \delta_0 e^{i\theta} - \lambda_0| \geq \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|},$$

το οποίο είναι άτοπο διότι για κάθε  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  το  $\mu + \delta_0 e^{i\theta}$  ανήκει στο  $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$ . Επομένως, η απεικόνιση  $\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  είναι κάτω ημισυνεχής.  $\square$

**Θεώρημα 3.6.6.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Τότε η απεικόνιση

$$\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B),$$

για  $\epsilon \in [0, 1)$ , είναι συνεχής.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 3.6.4 και 3.6.5.  $\square$

### 3.7 Το Σύνορο του $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ και Ιδιοτιμές

Η έννοια του φάσματος γενικεύεται και στους όχι υποχρεωτικά τετραγωνικούς πίνακες. Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $n \geq m$ . Ένας  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα  $A$  ως προς τον πίνακα  $B$  αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^m$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$ . Στην περίπτωση αυτή το  $x_0$  ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* της ιδιοτιμής  $\mu_0$  [6]. Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  ως προς τον πίνακα  $B$  ονομάζεται *φάσμα* του  $A$  ως προς τον  $B$  και το συμβολίζουμε με  $\sigma(A; B)$ .

Πρέπει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι η συνθήκη  $n \geq m$  για τις διαστάσεις του πίνακα  $A - \mu B$  είναι απαραίτητη. Αν  $m > n$ , τότε για κάθε  $\mu \in \mathbb{C}$  καθώς οι γραμμές του πίνακα  $A - \mu B$  είναι  $n$  σε πλήθος αλλά διάστασης  $m > n$ , μπορούμε να επιλέξουμε από το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου του  $\mathbb{C}^m$  που παράγουν, ένα διάνυσμα  $y_\mu \neq 0$  τέτοιο ώστε να είναι  $(A - \mu B)y = 0$ . Έτσι όμως προκύπτει ότι  $\sigma(A; B) = \mathbb{C}$ , περίπτωση τετριμμένη.

**Πρόταση 3.7.1.** Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα,  $n \geq m$  και  $\mu_0$  μια ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$ . Αν  $x_0$  ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα (δηλαδή  $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$ ), τότε για κάθε  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ , η ιδιοτιμή  $\mu_0$  ανήκει στο σύνολο  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} &= \frac{\|A - \lambda B\| \|x_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \geq \frac{\|Ax_0 - \lambda Bx_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \\ &= \frac{\|\mu_0 Bx_0 - \lambda Bx_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} = \frac{\|Bx_0\| |\mu_0 - \lambda|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}. \end{aligned}$$

Όμως για  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ , η τελευταία ισότητα δίνει

$$\frac{\|Bx_0\| |\mu_0 - \lambda|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \geq |\mu_0 - \lambda|,$$

άρα  $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . □

Στην περίπτωση του αριθμητικού πεδίου  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ , δηλαδή για  $\epsilon = \epsilon_B$ , η Πρόταση 3.7.1 οδηγεί στο επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.7.2.** Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα. Έστω επίσης  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ) με  $\|B\| \geq 1$ . Κάθε ιδιοτιμή  $\mu_0$  του  $A$  ως προς τον  $B$ , με αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^m$  τέτοιο ώστε  $\|Bx_0\| \geq 1$ , ανήκει στο  $F_{\|\cdot\|}(A; B) = F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση,

$$\epsilon_B \geq \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|$$

ή

$$\sqrt{\|B\|^2 - 1} / \|B\| \geq \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|.$$

Επομένως, αρκεί  $\|Bx_0\| \geq 1$ . □

Για την περίπτωση των τετραγωνικών πινάκων με  $B$  αντιστρέψιμο και  $\epsilon = \epsilon_B$ , από το πόρισμα αυτό έπεται άμεσα και το επόμενο.

**Πόρισμα 3.7.3.** Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα. Έστω επίσης  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  με  $\|B\| \geq 1$  και  $\|B^{-1}\| \leq 1$ . Τότε όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  ως προς τον  $B$  ανήκουν στο  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$ .

Απόδειξη. Έστω  $\mu_0$  μια ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$  και έστω  $x_0$  μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της. Τότε

$$1 = \|x_0\| = \|BB^{-1}x_0\| \leq \|B^{-1}\| \|Bx_0\| \leq \|Bx_0\|.$$

Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □



Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, αν μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  ανήκει στο σύνορο του αριθμητικού του πεδίου  $F(A)$ , τότε αυτή είναι κανονική ιδιοτιμή. Έστω  $A, B$  δύο τετραγωνικοί πίνακες ίδιας διάστασης με  $B$  αντιστρέψιμο. Τότε ορίζουμε κανονική ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$  κάθε κανονική ιδιοτιμή του πίνακα  $B^{-1}A$ .

**Πόρισμα 3.7.4.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mu$  μια ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$  και  $\mu \in \partial F_{\|\cdot\|_2}^{\epsilon_B}(A; B)$ . Αν  $\|B^{-1}\|_2 \leq 1$ , τότε η  $\mu$  είναι κανονική ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$ .

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.7.3 ισχύει ότι  $\mu \in F_{\|\cdot\|_2}^{\epsilon_B}(A; B)$ . Άρα

$$|\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\|_2 \leq \|B^{-1}A - \lambda I_n\|_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Δηλαδή,  $\mu \in F(B^{-1}A)$ . Όμως, αφού  $\mu \in \partial F_{\|\cdot\|_2}^{\epsilon_B}(A; B)$ , τότε για κάθε  $\delta > 0$  υπάρχει  $\lambda_\delta$  τέτοιο ώστε

$$|\mu - \lambda_\delta| + \delta > \|A - \lambda_\delta B\|_2 \geq \|B^{-1}\| \|A - \lambda_\delta B\|_2 \geq \|B^{-1}A - \lambda_\delta I_n\|_2.$$

Δηλαδή,  $\mu \in \partial F(B^{-1}A)$ . Συνεπώς το  $\mu$  είναι κανονική ιδιοτιμή του  $B^{-1}A$ , άρα και του  $A$  ως προς τον  $B$ .  $\square$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τι συμβαίνει όταν μια ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$  ανήκει στο σύνορο του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ .

**Πρόταση 3.7.5.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  με  $B \neq 0$  και  $0 \leq \epsilon < 1$  και έστω ότι ο πίνακας  $A$  δεν είναι πολλαπλάσιο του  $B$ . Έστω επίσης  $\mu_0$  μια ιδιοτιμή του  $A$  ως προς τον  $B$  που βρίσκεται στο σύνορο του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ . Τότε για κάθε μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^m$  της ιδιοτιμής  $\mu_0$ , ισχύει ότι

$$\epsilon \in \left[0, \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|\right].$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή  $\mu_0$  βρίσκεται στο σύνορο του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ . Τότε για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει  $\lambda_\delta \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_\delta \neq \mu_0$ , τέτοιο ώστε

$$\mathcal{D}(\mu_0, \delta) \not\subseteq \mathcal{D}\left(\lambda_\delta, \frac{\|A - \lambda_\delta B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right),$$

ή

$$|\mu_0 - \lambda_\delta| + \delta > \frac{\|A - \lambda_\delta B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \geq \frac{\|(A - \lambda_\delta B)x_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}.$$

Όμως, αφού  $Ax_0 = \mu_0 Bx_0$ , έπεται ότι

$$|\mu_0 - \lambda_\delta| + \delta > \frac{\|(\mu_0 - \lambda_\delta)Bx_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} = \frac{|\mu_0 - \lambda_\delta| \|Bx_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}$$

ή

$$|\mu_0 - \lambda_\delta| \left( \frac{\|Bx_0\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} - 1 \right) \leq \delta. \quad (3.7.1)$$

Από το γεγονός ότι  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  δεν είναι μονοσύνολο και ότι ανήκει στον δίσκο  $\mathcal{D}(\lambda_\delta, \|A - \lambda_\delta B\|/\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|)$ , έπεται ότι το  $\lambda_\delta$  δε μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά στο  $\mu_0$ . Επομένως, αν

$$\epsilon \notin \left[ 0, \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\| \right].$$

η ανισότητα (3.7.1) οδηγεί σε άτοπο.  $\square$

Από την Πρόταση 3.7.1 έχουμε ότι για μια ιδιοτιμή  $\mu_0$  με μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^m$  είναι  $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  για  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ . Αν λοιπόν οι πίνακες  $A, B$  είναι τετραγωνικοί  $n \times n$  και ο  $B$  είναι αντιστρέψιμος με  $\|B^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ , τότε όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  ως προς τον  $B$  ανήκουν στο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Έτσι μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του γενικευμένου επιλύοντος συνόλου του  $(A - zB)$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ , το οποίο αποτελεί επέκταση του γνωστού αποτελέσματος της απόστασης ενός σημείου από το αριθμητικό πεδίο τελεστή.

**Πρόταση 3.7.6.** Έστω ότι η νόρμα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα. Έστω επίσης  $\epsilon \in [0, 1)$  και  $A, B$   $n \times n$  πίνακες με τον  $B$  αντιστρέψιμο τέτοιο ώστε  $\|B^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ . Τότε για κάθε μιγαδικό  $\xi \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ , η απόσταση  $d(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B))$  του  $\xi$  από το χωρίο  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$d(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \|(A - \xi B)^{-1}\|}.$$

Απόδειξη. Για τυχαίο  $\mu \in F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n)$ , έχουμε

$$|\mu - \lambda| \leq \|AB^{-1} - \lambda I_n\| \leq \|(A - \lambda B)\| \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

και έτσι,  $F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Από [32], για κάθε κυρτό σύνολο  $V$  που περιέχει το  $F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n)$  και κάθε  $\xi \notin V$ , ισχύει  $d(\xi, V) \leq \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|^{-1}$ . Αν τώρα θέσουμε  $V = F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  έπεται ότι

$$d(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)) \leq \frac{1}{\|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|} \leq \frac{(\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|)^{-1}}{\|B^{-1}\| \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τα συνοριακά σημεία του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ , των οποίων και κάνει σαφή χαρακτηρισμό ανάλογα με τις τιμές που παίρνει το  $\epsilon \in [0, 1)$ .

**Πρόταση 3.7.7.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $B \neq 0$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  και  $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .

(i) Το σημείο  $\mu_0$  ανήκει στο σύνορο  $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  αν και μόνο αν

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

(ii) Αν  $\epsilon > 0$ , τότε το σημείο  $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  αν και μόνο αν

$$\min_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει ένα  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε

$$\|A - \lambda_0 B\| = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_0|.$$

Απόδειξη.

(i) Αν το  $\mu_0$  είναι συνοριακό σημείο του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ , τότε για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει ένα  $\lambda_\delta \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε

$$\|A - \lambda_\delta B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_\delta| + \delta. \quad (3.7.2)$$

Επομένως, η διαφορά  $\|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda|$  είναι μη αρνητική για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ , άρα έπεται ότι

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0$$

και για άτοπο, δεχόμαστε ότι  $\mu_0 \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$ . Άρα, υπάρχει πραγματικός  $r > 0$  τέτοιος ώστε  $\mathcal{D}(\mu_0, r) \subset \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$ . Επομένως,

$$\mathcal{D}(\mu_0, r) \subset \text{Int} \left[ \mathcal{D} \left( \lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right) \right], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| r, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| r > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Έστω τώρα  $\epsilon > 0$  και  $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Θέτοντας  $\delta = 1/k$  και  $\lambda_\delta = \lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) στην (3.7.2) έπεται ότι

$$\|A - \lambda_k B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_k| + \frac{1}{k},$$

ή

$$|\|A\| - \|\lambda_k B\|| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_k| + \frac{1}{k}.$$

Όπως έχουμε δει και σε προηγούμενες αποδείξεις, αν  $|\lambda_k| \|B\| < \|A\|$ , τότε έχουμε  $|\lambda_k| < \|A\| / \|B\|$ . Αν όχι, τότε

$$|\lambda_k| \|B\| - \|A\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| (|\mu_0| + |\lambda_k|) + 1/k$$

και αφού  $\epsilon > 0$ , προκύπτει ότι

$$|\lambda_k| < \frac{\|A\| + \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0| + 1}{\|B\| (1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})}.$$

Άρα, η ακολουθία  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία  $\{\lambda_{k_t}\}_{t \in \mathbb{N}}$ . Αν υποθέσουμε ότι  $\lambda_{k_t} \rightarrow \lambda_0$ , τότε

$$\|A - \lambda_{k_t} B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_{k_t}| + \frac{1}{k_t}, \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

ή

$$\lim_t \left( \|A - \lambda_{k_t} B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_{k_t}| - \frac{1}{k_t} \right) \leq 0,$$

ή

$$\|A - \lambda_0 B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_0| \leq 0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι δυνατή μόνο ως ισότητα.

Το αντίστροφο έπεται άμεσα από το (i). □

Αν λοιπόν έχουμε ότι  $\epsilon > 0$ , τότε η προηγούμενη πρόταση ουσιαστικά λέει ότι για κάθε  $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  υπάρχει ένας γεννήτορας δίσκος του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  τέτοιος ώστε  $\mu_0 \in \partial \mathcal{D} \left( \lambda_0, \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$ . Συνεπώς, για  $\epsilon > 0$  και λόγω της κυρτότητας του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ , έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.7.8.** Αν  $0 < \epsilon < 1$ , τότε το σύνορο  $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

Το Πόρισμα 3.7.8 εξηγεί τη μη παρουσία ευθύγραμμων τμημάτων στο σύνορο του  $q$ -αριθμητικού πεδίου για  $q \in (0, 1)$ , κάτι που είχε παρατηρηθεί εδώ και χρόνια για το σύνολο  $F(A; q)$ , χωρίς όμως να έχει αποδειχθεί.

Αξιίζει να σημειωθεί ότι για  $\epsilon = 0$ , το  $\partial F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$  μπορεί να περιέχει ευθύγραμμα τμήματα. Μια πολύ γνωστή τέτοια περίπτωση είναι το κλασικό αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $F(A) = F_{\|\cdot\|_2}^0(A; I_n)$  που για  $A$  κανονικό, είναι πάντα κυρτό πολύγωνο. Μια άλλη τέτοια περίπτωση δίνουν τα παρακάτω.

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ) είναι διαγώνιοι, δηλαδή όλα τα μη διαγώνια στοιχεία τους είναι μηδενικά και τους συμβολίζουμε  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  και  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ . Υποθέτουμε επίσης ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του  $B$  είναι μη μηδενικά. Τότε οι λόγοι  $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_m/b_m$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$  ως προς τον  $B$ , με αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα τα διανύσματα της κανονικής βάσης του  $\mathbb{C}^m$ . Από το Πρόρισμα 3.7.2 έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 3.7.9.** Έστω  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  και  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$   $n \times m$  ( $n \geq m$ ) διαγώνιοι πίνακες με  $b_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Τότε κάθε ιδιοτιμή  $a_i/b_i \in \sigma(A; B)$  με  $|b_i| \geq 1$  ανήκει στο  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon B}(A; B)$ .

Συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_d$  μια νόρμα πίνακα τέτοια ώστε για κάθε  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) διαγώνιο πίνακα  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ , ισχύει  $\|D\|_d = \max\{|d_j| : j = 1, 2, \dots, m\}$ . Τέτοιες νόρμες είναι οι  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  και  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Πρόταση 3.7.10.** Έστω  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  και  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  δύο  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) διαγώνιοι πίνακες. Αν  $|b_1| = |b_2| = \dots = |b_m| = 1$ , τότε το αριθμητικό πεδίο  $F_{\|\cdot\|_d}(A; B) = F_{\|\cdot\|_d}^{\epsilon B}(A; B)$  είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του  $A$  ως προς τον  $B$ ,  $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_m/b_m$ .

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα και την κυρτότητα του  $F_{\|\cdot\|_d}(A; B)$ , έπεται ότι  $\text{Co}\{\sigma(A; B)\} \subseteq W_{\|\cdot\|_d}^{\epsilon B}(A; B)$ . Έστω τώρα ένα  $\mu \notin \text{Co}\{\sigma(A; B)\}$ . Τότε υπάρχει ένας  $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$  και ένας πραγματικός  $r_\mu > 0$  τέτοιοι ώστε ο κλειστός δίσκος  $\mathcal{D}(\lambda_\mu, r_\mu)$  να περιέχει την  $\text{Co}\{\sigma(A; B)\}$  αλλά όχι το  $\mu$ . Συνεπώς,

$$\left| \lambda_\mu - \frac{a_i}{b_i} \right| \leq r_\mu < |\lambda_\mu - \mu|, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

ή

$$|a_i - \lambda_\mu b_i| < |\lambda_\mu - \mu|, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

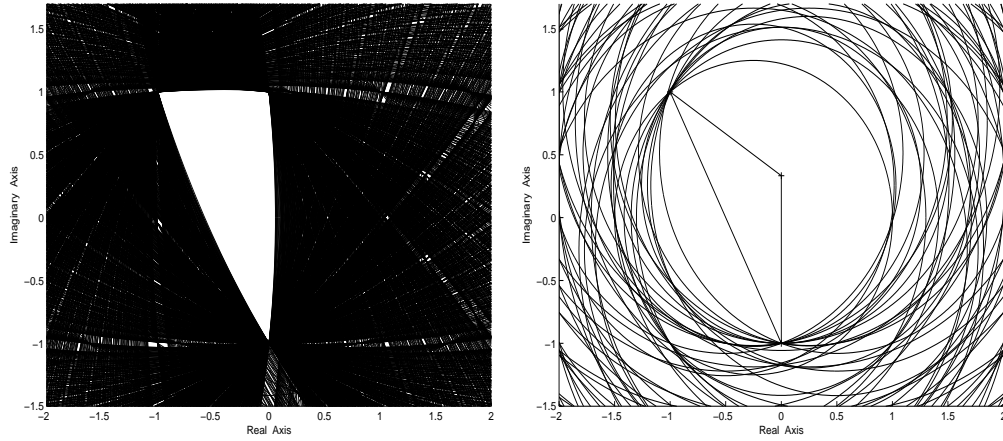
ή

$$\|A - \lambda_\mu B\|_d < |\lambda_\mu - \mu|.$$

Άρα,  $\mu \notin F_{\|\cdot\|_d}^{\epsilon B}(A; B)$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Για να επιβεβαιώσουμε την προηγούμενη πρόταση ακολουθεί ένα παράδειγμα. Για τους  $4 \times 3$  διαγώνιους πίνακες  $A = \text{diag}\{i, 1, 1+i\}$  και  $B = \text{diag}\{1, i, -i\}$ , το  $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$  είναι η λευκή περιοχή στο αριστερό μέρος του Σχήματος 3.4, που είναι η κυρτή θήκη του  $\sigma(A; B) = \{i, -i, -1+i\}$ , επιβεβαιώνοντας την Πρόταση 3.7.10. Αν αντικαταστήσουμε τον  $B$  με τον πίνακα  $\hat{B} = \text{diag}\{3, i, -i\}$ , τότε η κυρτή

θήκη των ιδιοτιμών (+),  $i/3, -i, -1 + i \in \sigma(A; \hat{B})$  είναι γνήσιο υποσύνολο του  $F_{\|\cdot\|_2}(A; \hat{B})$ , όπως δείχνει το δεξιό μέρος του σχήματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\hat{B}$  με μέτρο 1 παραμένουν στο σύνορο.



Σχήμα 3.4: Τα αριθμητικά πεδία  $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$  (αριστερά) και  $F_{\|\cdot\|_2}(A; \hat{B})$  (δεξιά).

Γνωρίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο (Πόρισμα 1.2.11) ότι το αριθμητικό πεδίο ενός ερμιτιανού πίνακα είναι κλειστό διάστημα του  $\mathbb{R}$ , με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του. Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε κάποια ανάλογα αποτελέσματα για το αριθμητικό πεδίο  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ , που προκύπτουν κάνοντας χρήση εννοιών που συναντάμε στους χώρους Krein [40].

Θεωρούμε τον χώρο  $\mathbb{C}^n$  και έναν ερμιτιανό πίνακα  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Βάσει του πίνακα  $B$  ορίζουμε το *αόριστο εσωτερικό γινόμενο* [26]

$$(x, y) = \langle Bx, y \rangle = y^* Bx,$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του  $\mathbb{C}^n$ . Ένας χώρος εφοδιασμένος με ένα αόριστο εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται *χώρος Krein*. Σημειώνουμε ότι αν ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος, τότε το αόριστο εσωτερικό γινόμενο είναι και μη εκφυλισμένο, δηλαδή  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Στην περίπτωση του αόριστου εσωτερικού γινομένου  $(\cdot, \cdot)$ , υπάρχει μοναδικός πίνακας  $A^{[*]}$  τέτοιος ώστε  $(x, Ay) = (A^{[*]}x, y)$ . Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$A^{[*]} = B^{-1}A^*B.$$

Ο πίνακας  $A^{[*]}$  ονομάζεται *ο  $B$ -αυτοσυζυγής του  $A$* . Επιπλέον, αν  $A^{[*]} = A$  τότε ο  $A$  ονομάζεται  *$B$ -ερμιτιανός*. Στη περίπτωση αυτή έχουμε

$$A^{[*]} = A \Leftrightarrow B^{-1}A^*B = A \Leftrightarrow A^*B = BA.$$

Αν  $A^{[*]} = -A$ , τότε ο  $A$  ονομάζεται  *$B$ -αντιερμιτιανός* και ισχύει

$$A^{[*]} = -A \Leftrightarrow B^{-1}A^*B = -A \Leftrightarrow A^*B + BA = 0.$$

Αν  $A^{[*]} = A^{-1}$ , τότε ο  $A$  ονομάζεται  $B$ -ορθομοναδιαίος και

$$A^*BA = B.$$

**Πρόταση 3.7.11.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  με  $B$  ερμιτιανό και αντιστρέψιμο. Αν ο  $A$  είναι  $B$ -ερμιτιανός, τότε  $F_{\|\cdot\|_2} \left( A; \frac{B}{\|B\|_2} \right) \subset \mathbb{R}$ , για  $\|B\|_2 \geq 1$ .

Απόδειξη. Έστω

$$\mu \in F_{\|\cdot\|_2} \left( A; \frac{B}{\|B\|_2} \right) \Leftrightarrow |\mu - \lambda| \leq \left\| A - \lambda \frac{B}{\|B\|_2} \right\|_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Όμως, από υπόθεση,  $A^{[*]} = A$ . Επομένως,

$$|\mu - \lambda| \leq \left\| B^{-1}A^*B - \lambda \frac{B}{\|B\|_2} \right\|_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

ή

$$|\mu - \lambda| \leq \left\| B^{-1}A^* - \frac{\lambda}{\|B\|_2} I_n \right\|_2 \|B\|_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

ή

$$|\mu - \lambda| \leq \| \|B\|_2 B^{-1}A^* - \lambda I_n \|_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι  $\mu \in F(\|B\|_2 B^{-1}A^*) = \|B\|_2 F(B^{-1}A^*)$ . Όμως, ο πίνακας  $B^{-1}A^*$  είναι ερμιτιανός, αφού  $(B^{-1}A^*)^* = AB^{-1} = B^{-1}A^*$  από την ιδιότητα του  $A$  να είναι  $B$ -ερμιτιανός. Άρα  $F_{\|\cdot\|_2} \left( A; \frac{B}{\|B\|_2} \right) \subseteq \|B\|_2 F(B^{-1}A^*) \subset \mathbb{R}$ , με

$$\|B\|_2 F(B^{-1}A^*) = \|B\|_2 [\lambda_{\min}(B^{-1}A^*), \lambda_{\max}(B^{-1}A^*)],$$

όπου  $\lambda_{\min}(B^{-1}A^*)$  και  $\lambda_{\max}(B^{-1}A^*)$  είναι η ελάχιστη και η μέγιστη ιδιοτιμή του  $B^{-1}A^*$ , αντίστοιχα.  $\square$

**Πρόταση 3.7.12.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  με  $B$  ερμιτιανό και αντιστρέψιμο. Έστω ότι ο  $A$  είναι  $B$ -αντιερμιτιανός. Τότε  $F_{\|\cdot\|_2} \left( A; \frac{B}{\|B\|_2} \right) \subset i \cdot \mathbb{R}$ , για  $\|B\|_2 \geq 1$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί ακριβώς την ίδια λογική με την προηγούμενη.  $\square$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι αν ο  $A$  είναι  $B$ -ερμιτιανός, για  $\|B\|_2 = 1$  έχουμε ότι  $F_{\|\cdot\|_2}(A; B) \subset \mathbb{R}$ , ενώ για  $\|B\|_2 \geq 1$  είναι  $F_{\|\cdot\|_2} \left( A; \frac{B}{\|B\|_2} \right) \subseteq \|B\|_2 F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$ , δηλαδή  $F_{\|\cdot\|_2}(A; B) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν όταν ο  $A$  είναι  $B$ -αντιερμιτιανός με τον φανταστικό άξονα.

Είδαμε από το πρώτο κεφάλαιο ότι για έναν  $A, \in \mathbb{C}^{n \times n}$  οι πίνακες

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

είναι το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του  $A$ , αντίστοιχα. Όμοια ονομάζουμε τους πίνακες

$$H_B(A) = \frac{A + A^{[*]}}{2} \quad \text{και} \quad S_B(A) = \frac{A - A^{[*]}}{2}$$

$B$ -ερμιτιανό και  $B$ -αντιερμιτιανό μέρος του  $A$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι  $A = H_B(A) + S_B(A)$ , καθώς επίσης και ότι

$$\begin{aligned} H_B(A)^{[*]} &= B^{-1} H_B(A)^* B = B^{-1} \frac{(A + A^{[*]})^*}{2} B \\ &= \frac{1}{2} B^{-1} (A + B^{-1} A^* B)^* B \\ &= \frac{1}{2} B^{-1} (A^* + B A B^{-1}) B = H_B(A) \end{aligned}$$

και όμοια

$$S_B(A)^{[*]} = -S_B(A).$$

**Πόρισμα 3.7.13.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  με  $B$  ερμιτιανό και αντιστρέψιμο. Τότε  $F_{\|\cdot\|_2}(H_B(A); B) \subseteq \|B\|_2 \operatorname{Re}\{F(AB^{-1})\} \subset \mathbb{R}$ .

Απόδειξη. Τα συμπεράσματα προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 3.7.11.  $\square$

Στους χώρους Krein η έννοια του θετικά ημιορισμένου πίνακα γενικεύεται στην έννοια του  $B$ -μη αρνητικού πίνακα, με παραπάνω από έναν τρόπους [41]. Ένας από αυτούς είναι ο εξής: ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ονομάζεται  $B$ -μη αρνητικός για έναν  $B$  ερμιτιανό και αντιστρέψιμο, αν ο πίνακας  $BA$  είναι θετικά ημιορισμένος. Για τα αριθμητικά πεδία των θετικά ορισμένων και ημιορισμένων πινάκων είδαμε τι ισχύει στο πρώτο κεφάλαιο. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1.2.13, το αριθμητικό πεδίο ενός θετικά ορισμένου πίνακα (αντίστοιχα ημιορισμένου) ανήκει στον θετικό ημιάξονα  $(0, +\infty)$  (αντίστοιχα στον μη αρνητικό ημιάξονα  $[0, +\infty)$ ). Η παρακάτω πρόταση γενικεύει το αποτέλεσμα αυτό στους  $B$ -μη αρνητικούς πίνακες.

**Πρόταση 3.7.14.** Έστω  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  με  $B$  ερμιτιανό και αντιστρέψιμο, έστω ότι ο  $A$  είναι  $B$ -ερμιτιανός και  $B$ -μη αρνητικός, δηλαδή ο  $BA$  είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε  $F_{\|\cdot\|_2}\left(A; \frac{B}{\|B\|_2}\right) \subset [0, +\infty)$ .

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.7.11 είδαμε ότι

$$F_{\|\cdot\|_2}\left(A; \frac{B}{\|B\|_2}\right) \subseteq \|B\|_2 F(B^{-1} A^*) = \|B\|_2 F(AB^{-1}),$$

αφού  $A$  είναι  $B$ -ερμιτιανός. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο πίνακας  $AB^{-1}$  είναι θετικά ορισμένος. Έστω  $x \in \mathbb{C}^n$  τυχαίο μη μηδενικό. Τότε έχουμε

$$x^* AB^{-1} x = x^* B^{-1} B A B^{-1} x = (B^{-1} x)^* (BA) (B^{-1} x) \geq 0$$

αφού ο πίνακας  $BA$  είναι θετικά ημιορισμένος. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$



## Κεφάλαιο 4

### Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας για Πολυωνυμικούς Πίνακες

#### 4.1 Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων

Θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζοντας το κλασικό αριθμητικό πεδίο (τετραγωνικών) πολυωνυμικών πινάκων και κάποιες από τις βασικές του ιδιότητες. Θεωρούμε έναν  $n \times n$  πολυωνυμικό πίνακα

$$P(z) = A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \cdots + A_1 z + A_0, \quad (4.1.1)$$

όπου  $z$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή και  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ), με  $A_l \neq 0$ .

Ένας αριθμός  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται ιδιοτιμή του  $P(z)$ , αν το σύστημα  $P(\lambda_0)x = 0$  έχει μη μηδενική λύση  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ . Το διάνυσμα  $x_0$  ονομάζεται δεξιό ιδιοδιάνυσμα του  $P(z)$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Αντίστοιχα, ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  που ικανοποιεί τη σχέση  $y_0^* P(\lambda_0) = 0$ , θα ονομάζεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του  $P(z)$  είναι το φάσμα του  $P(z)$

$$\sigma(P(z)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(P(\mu)) = 0\}.$$

Στη περίπτωση που  $\det(A_l) \neq 0$ , το φάσμα του πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$  έχει το πολύ  $nl$  διακεκριμένα στοιχεία. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι δεχόμαστε ότι η ορίζουσα  $\det(P(z))$  δεν είναι ταυτοτικά μηδενική, διότι τότε θα ήταν  $\sigma(P(z)) = \mathbb{C}$ .

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν  $\det(A_l) = 0$ . Παρατηρούμε ότι για  $z \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} P(z) &= A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \cdots + A_1 z + A_0 \\ &= z^l \left( A_l + A_{l-1} \frac{1}{z} + \cdots + A_1 \frac{1}{z^{l-1}} + A_0 \frac{1}{z^l} \right), \end{aligned}$$

επομένως,

$$z^l P(z^{-1}) = A_0 z^l + A_1 z^{l-1} + \cdots + A_{l-1} z + A_l.$$

Όμως, αφού  $\det(A_l) = 0$ , έπεται ότι ο πολυωνυμικός πίνακας  $R(z) = z^l P(z^{-1})$ , που στο εξής θα τον ονομάζουμε *αλγεβρικά αντίστροφο* του  $P(z)$ , έχει τη μηδενική ιδιοτιμή. Άρα θεωρούμε ότι ο  $P(z)$  έχει ιδιοτιμή το  $\infty$ . Τα ιδιοδιανύσματα της άπειρης ιδιοτιμής του  $P(z)$  είναι τα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής 0 του πίνακα  $R(z)$ , με τις ίδιες πολλαπλότητες. Για περισσότερα στοιχεία για τους πολυωνυμικούς πίνακες και τη φασματική τους θεωρία, προτείνεται το βιβλίο των I. Gohberg, P. Lancaster και L. Rodman [17].

**Ορισμός 4.1.1.** Το αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$  είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} W(P(z)) &= \{\mu \in \mathbb{C} : x^* P(\mu) x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}. \end{aligned}$$

Προφανώς, το αριθμητικό πεδίο  $W(P(z))$  περιέχει το *φάσμα* του  $P(z)$ . Στην περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας  $P(z)$  είναι πρώτου βαθμού, της μορφής  $P(z) = zI_n - A$ , έχουμε  $\sigma(P(z)) = \sigma(A)$  και

$$\begin{aligned} W(P(z)) &= \{\mu \in \mathbb{C} : x^* P(\mu) x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : x^* (\mu I_n - A) x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= F(A). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις βασικότερες ιδιότητες του πεδίου  $W(P(z))$ . Αρκετές από αυτές θα τις γενικεύσουμε στη επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου, για τα αντίστοιχα σύνολα των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων, που θα ορίσουμε εκεί.

**Πρόταση 4.1.1.** Έστω ένας πολυωνυμικός πίνακας  $P(z)$  όπως στη (4.1.1). Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Το  $W(P(z))$  είναι κλειστό σύνολο στο  $\mathbb{C}$ .
- (ii) Για κάθε  $a \in \mathbb{C}$ , ισχύει  $W(P(z+a)) = W(P(z)) - a$ .
- (iii) Αν  $R(z) = A_0 z^l + \cdots + A_{l-1} z + A_l = z^l P(z^{-1})$  είναι ο αλγεβρικά αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας του  $P(z)$ , τότε

$$W(R(z)) \setminus \{0\} = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W(P(z)) \setminus \{0\}\}.$$

- (iv) Για κάθε πίνακα  $S \in \mathbb{C}^{n \times r}$  βαθμού  $\text{rank } S = r$ , όπου  $r \leq n$ , ισχύει

$$W(S^* P(z) S) \subseteq W(P(z)).$$

Η ισότητα ισχύει για  $n = r$ .

(v) Αν οι πίνακες  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ) έχουν κοινό ισοτροπικό διάνυσμα  $x \in \mathbb{C}^n$ , δηλαδή  $x^* A_j x = 0$ , ( $j = 0, 1, \dots, l$ ), τότε  $W(P(z)) = \mathbb{C}$ .

Το αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα, αν και κλειστό λόγω της συνέχειας των ριζών ενός (βαθμωτού) πολυωνύμου ως προς τους συντελεστές του, δεν είναι κυρτό αλλά ούτε κατ' ανάγκη φραγμένο ή συνεκτικό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, όπως το αριθμητικό πεδίο ενός σταθερού πίνακα. Ωστόσο ισχύει το επόμενο θεώρημα [36].

**Θεώρημα 4.1.2.** Έστω  $P(z)$  ένας πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.1.1). Τότε το  $W(P(z))$  είναι φραγμένο αν και μόνο αν  $0 \notin F(A_l)$ .

Αν το  $W(P(z))$  είναι φραγμένο, τότε ισχύει η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.3.** Αν το  $W(P(z))$  είναι φραγμένο, τότε αποτελείται από το πολύ  $l$  συνεκτικά τμήματα, όπου  $l$  ο βαθμός του  $P(z)$ .

**Πρόταση 4.1.4.** Αν το  $W(P(z))$  είναι φραγμένο και αποτελείται από ακριβώς  $l$  συνεκτικά τμήματα  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ , τότε για κάθε διάνυσμα  $x \neq 0$ , η εξίσωση  $x^* P(z) x = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα σε κάθε  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Τα συνεκτικά τμήματα του  $W(P(z))$  μπορεί να είναι και απλά μεμονωμένα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, για τις καταστάσεις αυτές ισχύει το παρακάτω θεώρημα [39].

**Θεώρημα 4.1.5.** Έστω  $P(z)$  ένας πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.1.1) και  $0 \notin F(A_l)$  (δηλαδή το  $W(P(z))$  είναι φραγμένο). Αν το  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  είναι μεμονωμένο σημείο του  $W(P(z))$ , τότε

(i)  $P(\mu_0) = 0$ ,

(ii)  $P(z) = (z - \mu_0)^k P_0(z)$  και  $W(P_0(z)) = W(P(z)) \setminus \{\mu_0\}$ .

Αντίστροφα, όταν ο πολυωνυμικός πίνακας επιδέχεται μια παραγοντοποίηση όπως στο (ii) και  $\mu_0 \notin W(P_0(z))$ , τότε το  $\mu_0$  είναι μεμονωμένο σημείο του  $W(P(z))$ .

Οι ιδιότητες ενός σημείου  $\mu \in W(P(z))$  συνδέονται άμεσα με τις ιδιότητες του  $0$  ως σημείου του  $F(P(\mu))$ . Για παράδειγμα, όπως είδαμε στον Ορισμό 4.1.1,  $\mu \in W(P(z))$  αν και μόνο αν  $0 \in F(P(\mu))$ . Επιπλέον, ισχύουν και τα παρακάτω αποτελέσματα [30, 39].

**Θεώρημα 4.1.6.** Έστω  $P(z)$  ένας πολυωνυμικός πίνακας όπως στην σχέση (4.1.1). Αν  $\mu_0 \in \partial W(P(z))$ , τότε  $0 \in \partial F(P(\mu_0))$ .

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει, καθώς απαιτεί δύο επιπλέον ασθενείς συνθήκες.

**Θεώρημα 4.1.7.** Έστω  $P(z)$  ένας πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.1.1). Αν  $0 \in \partial F(P(\mu_0))$ ,  $P(\mu_0) \neq 0$  και  $0 \notin F(P'(\mu_0))$  τότε  $\mu_0 \in \partial W(P(z))$ .

## 4.2 Σύνολα Birkhoff–James ε–Ορθογωνιότητας για Πολυωνυμικούς Πίνακες

Θεωρούμε έναν  $n \times m$  πολυωνυμικό πίνακα

$$P(z) = A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \cdots + A_1 z + A_0, \quad (4.2.1)$$

όπου  $z$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή και  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ) με  $A_l \neq 0$ .

Αν  $n \geq m$ , τότε ένας μιγαδικός  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται *ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$* , όπως στην (4.2.1), αν  $P(\mu_0)x_0 = 0$  για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα  $x_0 \in \mathbb{C}^m$ . Τότε το διάνυσμα  $x_0$  καλείται *ιδιοδιάνυσμα του  $P(z)$*  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\mu_0$ . Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) πίνακα  $P(z)$  είναι το *φάσμα* του  $P(z)$ ,

$$\sigma(P(z)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{rank} P(\mu) < m\}.$$

Όπως είδαμε στον Ορισμό 4.1.1, για έναν  $n \times n$  πολυωνυμικό πίνακα  $P(z)$ , το (κλασικό) αριθμητικό πεδίο του  $P(z)$  έχει οριστεί να είναι το σύνολο

$$W(P(z)) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}. \quad (4.2.2)$$

Παρακινούμενοι από τη σχέση (4.2.2) και τον Ορισμό 3.2.1, για έναν  $n \times m$  πολυωνυμικό πίνακα  $P(z)$  όπως στην (4.2.1), ένα μη μηδενικό πίνακα  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και μια νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$ , προχωράμε στους ακόλουθους ορισμούς.

**Ορισμός 4.2.1.** Το αριθμητικό πεδίο του  $P(z)$  ως προς τον  $B$ , για  $\|B\| \geq 1$ , ορίζεται ως το σύνολο

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}(P(\mu); B)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B, J}^{\epsilon_B} P(\mu), \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

**Ορισμός 4.2.2.** Το  $q$ -αριθμητικό πεδίο του  $P(z)$  ως προς τον  $B$ , για  $0 \leq q \leq 1$  και  $\|B\| \geq q$ , ορίζεται ως το σύνολο

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}(P(\mu); B; q)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq q|\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B, J}^{\epsilon_q} P(\mu), \epsilon_q = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

**Ορισμός 4.2.3.** Το σύνολο *Birkhoff–James*  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας του  $P(z)$  ως προς τον  $B$ , για  $0 \leq \epsilon < 1$ , ορίζεται ως το σύνολο

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu); B)\} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu)\}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Η κλειστότητα των τριών αυτών συνόλων έπεται από τη συνέχεια των νορμών πίνακα, ενώ για  $q = 0$ ,  $W_{\|\cdot\|}(P(z); B; 0) = \mathbb{C}$ . Επιπλέον, από τους Ορισμούς 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.3, το Θεώρημα 3.4.4 και το Πρόρισμα 3.4.5 επεκτείνονται στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων.

**Θεώρημα 4.2.1.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.2.1). Για κάθε μη μηδενικό  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $\epsilon \in [0, 1)$ , ισχύει

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q_\epsilon) = W_{\|\cdot\|}(P(z); q_\epsilon^{-1}B),$$

όπου  $q_\epsilon = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ . Ισοδύναμα, για κάθε  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $q \in (0, 1]$ , με  $\|B\| \geq q$ , ισχύει

$$W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_q}(P(z); B) = W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) = W_{\|\cdot\|}(P(z); q^{-1}B),$$

όπου  $\epsilon_q = \sqrt{\|B\|^2 - q^2} / \|B\|$ .

**Πόρισμα 4.2.2.** Για κάθε  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  και  $q \in (0, 1]$ , με  $\|B\| = q$ , ισχύει

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) = W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} P(z)\}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα  $P(z) = Bz - A$ , ο Ορισμός 3.4.1 και η (4.2.6) δίνουν  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(Bz - A; B) = F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ . Επιπλέον, αν για ένα  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  ισχύει  $P(\mu_0) = 0$ , τότε άμεσα προκύπτει ότι  $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

Αν όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου  $P(z)$  είναι πολλαπλάσια του πίνακα  $B$ , τότε ο πολυωνυμικός πίνακας γράφεται στη μορφή  $P(z) = p(z)B$  για κάποιο μιγαδικό πολυώνυμο  $p(z)$ . Άρα, για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$ , το σύνολο Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(p(z)B; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |p(\mu) - \lambda| \|B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

περιέχει όλες τις ρίζες του  $p(z)$ .

### 4.3 Βασικές Ιδιότητες του $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$

Όπως και στην περίπτωση των πινάκων, το σύνολο  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι γενίκευση των αριθμητικών πεδίων  $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$  και  $W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q)$ . Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του συγκεκριμένου συνόλου. Στην ειδική περίπτωση των τετραγωνικών πινάκων, δηλαδή για  $n = m$ ,  $B = I_n$  και  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|_2}(P(z); I_n) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|_2}(P(\mu); I_n)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\} \\ &= W(P(z)), \end{aligned}$$

δηλαδή, ο ορισμός του  $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$  αποτελεί γενίκευση του ορισμού του κλασικού αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικού πίνακα  $W(P(z))$ . Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες του  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

Έστω τώρα ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας  $P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j$  όπως στη (4.2.1), ένας μη μηδενικός πίνακας  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , μια νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  και ένα  $\epsilon \in [0, 1)$ .

**Πρόταση 4.3.1.** Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B),$$

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B) = \alpha^{-1} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$$

και

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) - \alpha.$$

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| P(\mu) - \frac{\lambda}{\alpha} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\alpha} \right|, \forall \frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B) = \left\{ \alpha^{-1} \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

και

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B) = \left\{ \mu - \alpha \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Πρόταση 4.3.2.** Αν  $R(z) = A_0 z^l + \dots + A_{l-1} z + A_l = z^l P(z^{-1})$  είναι ο αλγεβρικά αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας του  $P(z)$ , τότε

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\} = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\}\}.$$

Απόδειξη. Ένα μη μηδενικό  $\mu \in \mathbb{C}$  ανήκει στο  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$  αν και μόνο αν

$$\|\mu^l P(\mu^{-1}) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\left\| P(\mu^{-1}) - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|, \quad \forall \frac{\lambda}{\mu^l} \in \mathbb{C}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Πρόταση 4.3.3.** Αν η νόρμα  $\|\cdot\|$  διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από τον συζυγή μετασχηματισμό  $\bar{\cdot}$  και οι συντελεστές του  $P(z)$  και ο πίνακας  $B$  είναι όλοι πραγματικοί πίνακες, τότε το  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα.

Απόδειξη. Έπεται από τις ισότητες  $\|P(\mu) - \lambda B\| = \|\overline{P(\mu)} - \overline{\lambda B}\| = \|P(\bar{\mu}) - \bar{\lambda} B\|$  και  $|\bar{\lambda}| = |\lambda|$  ( $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ ).  $\square$

Η επόμενη πρόταση είναι γενίκευση της Πρότασης 4.1.1(v).

**Πρόταση 4.3.4.** Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα. Αν υπάρχουν δύο μοναδιαία διανύσματα  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  και  $y_0 \in \mathbb{C}^m$  τέτοια ώστε  $|x_0^* B y_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$  και  $x_0^* A_j y_0 = 0$  για κάθε  $j = 0, 1, \dots, l$ , τότε  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \mathbb{C}$ .

Απόδειξη. Για κάθε  $\mu \in \mathbb{C}$ , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|P(\mu) - \lambda B\| &= \|x_0^* \|P(\mu) - \lambda B\| \|y_0\| \\ &\geq \|x_0^* P(\mu) y_0 - \lambda(x_0^* B y_0)\| \\ &\geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \end{aligned}$$

για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  $\square$

Για τις ιδιοτιμές ενός πολυωνυμικού πίνακα, όπως ορίστηκαν στην αρχή της παραγράφου έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 4.3.5.** Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα και  $n \geq m$ . Έστω επίσης  $\mu_0$  μια ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα  $P(z)$  και  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της. Τότε για κάθε  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ , η ιδιοτιμή  $\mu_0$  ανήκει στο  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

Απόδειξη. Αφού  $\|Bx_0\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ , έπεται ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \|P(\mu_0) - \lambda B\| \|x_0\| &\geq \|P(\mu_0)x_0 - \lambda Bx_0\| \\ &= \|\lambda Bx_0\| \\ &\geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Για έναν τετραγωνικό πολυωνυμικό πίνακα  $P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j$ , είναι γνωστό από το Θεώρημα 4.1.2 ότι το αριθμητικό πεδίο  $W(P(z))$  είναι μη φραγμένο αν και μόνο αν  $0 \in F(A_l)$ . Η επόμενη πρόταση γενικεύει το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα στην περίπτωση των συνόλων Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων.

**Θεώρημα 4.3.6.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στην (4.2.1),  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  μη μηδενικός πίνακας και  $\epsilon \in [0, 1)$ .

- (i) Αν το  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι μη φραγμένο, τότε  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ .
- (ii) Έστω ότι  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$  και το 0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του χωρίου  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$ , όπου  $R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j = z^l P(z^{-1})$ . Τότε το σύνολο  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι μη φραγμένο.

Απόδειξη.

(i) Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι μη φραγμένο και έστω  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\}$ . Τότε ισχύει ότι

$$\|A_l \mu^l + A_{l-1} \mu^{l-1} + \cdots + A_1 \mu + A_0 - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$|\mu^l| \left\| A_l + A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \cdots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\left\| A_l - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| + \left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \cdots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι  $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ , ή ισοδύναμα, ότι υπάρχει ένα  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $\|A_l - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|$ . Αφού όμως υποθέσαμε ότι το σύνολο  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι μη φραγμένο, τότε για κατάλληλα μεγάλο  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , η ποσότητα  $\left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \cdots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\|$  γίνεται μικρότερη από τη διαφορά  $\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| - \|A_l - \lambda_0 B\|$ . Τότε αν θέσουμε  $\lambda = \lambda_0 \mu^l$  έπεται ότι

$$\left\| A_l - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| + \left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \cdots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|.$$

Το τελευταίο είναι άτοπο.



(ii) Θεωρούμε τον αλγεβρικά αντίστροφο πολυωνυμικό πίνακα  $R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j = z^l P(z^{-1})$  του  $P(z)$ . Από την Πρόταση 4.3.2 ισχύει ότι

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\} = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\}\}.$$

Αφού όμως από υπόθεση  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ , συνεπάγεται ότι  $0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$ . Επιπλέον, αφού το 0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$ , υπάρχει μια ακολουθία  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\}$  που συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως σημαίνει ότι η ακολουθία  $\{\mu_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι μη φραγμένη. Επομένως, το σύνολο  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  είναι επίσης μη φραγμένο.  $\square$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η συνθήκη το 0 να μην είναι μεμονωμένο σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$  ισχύει πάντα στην περίπτωση του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων  $W(P(z))$ . Αυτό επιβεβαιώνεται από το δεύτερο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 2.3 του [36], του δεύτερου μέρους του Λήμματος του [39] και του γεγονότος ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του  $P(z)$  είναι μη μηδενικός (βλέπε επίσης Θεώρημα 4.1.5).

Όπως και στην περίπτωση των σταθερών πινάκων (Πρόταση 3.4.3) και για τους πολυωνυμικούς πίνακες ισχύει ότι το σύνολο  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε.

**Πρόταση 4.3.7.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.2.1),  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  μη μηδενικός πίνακας και  $\epsilon \in [0, 1)$ . Έστω επίσης ένα  $\Omega \subset \mathbb{C}$  συμπαγές τέτοιο ώστε για κάθε  $\mu \in \Omega$ , ο πίνακας  $P(\mu)$  δεν είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του πίνακα  $B$ . Τότε υπάρχει ένα  $\epsilon_\Omega \in [0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\Omega \subseteq W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(P(z); B)$ .

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 3.4.3, έχουμε ότι για κάθε  $\mu \in \Omega$ , υπάρχει ένα  $\epsilon_\mu \in [0, 1)$  τέτοιο ώστε  $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(P(\mu); B)$ , ή ισοδύναμα,  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(P(z); B)$ . Το τελευταίο μέρος της Πρότασης 3.4.3 δίνει το αποτέλεσμα.  $\square$

Η επόμενη πρόταση και το πόρισμά της αφορούν  $n \times n$  πολυωνυμικούς πίνακες  $P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j$  και τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ .

**Πρόταση 4.3.8.** Έστω ένα  $\mu_0 \in W(P(z))$  και έστω  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  τέτοιο ώστε  $\|x_0\|_2 = 1$  και  $x_0^* P(\mu_0) x_0 = 0$ . Τότε για κάθε  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|_2^2 - |x_0^* B x_0|^2} / \|B\|_2, 1 \right)$ , το  $\mu_0$  ανήκει στο  $W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$ .

*Απόδειξη.* Αφού  $|x_0^* B x_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2$ , έπεται άμεσα ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\|_2 \geq \|x_0^* (P(\mu_0) - \lambda B) x_0\|_2 = |\lambda| |x_0^* B x_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2 |\lambda|$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

**Πόρισμα 4.3.9.** Για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$  τέτοιο ώστε το εσωτερικό του κλειστού δίσκου  $\mathcal{D}(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2)$  έχει κενή τομή με το αριθμητικό πεδίο  $F(B)$  του  $B$ , ισχύει ότι  $W(P(z)) \subseteq W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$ .

## 4.4 Σύνορο και Εσωτερικό

Ένα σημείο  $\mu$  του κλασικού αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικού πίνακα  $W(P(z))$  και οι ιδιότητές του, είναι άμεσα συνδεδεμένα με το 0 και τις αντίστοιχες ιδιότητές του ως σημείο του  $F(P(\mu))$ . Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση γνωστών θεωρημάτων για το σύνορο του  $W(P(z))$ .

**Θεώρημα 4.4.1.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στη (4.2.1),  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  μη μηδενικός πίνακας,  $\epsilon \in [0, 1)$  και  $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

- (i) Αν  $\mu_0 \in \partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , τότε  $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$ .
- (ii) Αν  $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B) \setminus F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$  και  $P(\mu_0) \neq 0$ , τότε το σημείο  $\mu_0$  ανήκει στο σύνορο  $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

Απόδειξη.

(i) Αφού  $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , έπεται ότι  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$ . Υποθέτουμε για άτοπο ότι το 0 ανήκει στο εσωτερικό του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$ ,  $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)]$ . Τότε από την Πρόταση 3.7.7 (ii), υπάρχει ένα  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|P(\mu_0) - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} > \delta.$$

Επομένως,

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| - \delta > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αναλύοντας κατά Taylor το πολώνυμο  $P(z)$  γύρω από το  $\mu_0$ , έχουμε

$$P(z) = P(\mu_0) + (z - \mu_0)P'(\mu_0) + (z - \mu_0)E(z, \mu_0), \quad (4.4.1)$$

όπου  $\|E(z, \mu_0)\| = o(1)$  καθώς  $|z - \mu_0| \rightarrow 0$ . Συνεπώς, υπάρχει πραγματικός  $r > 0$  τέτοιος ώστε για κάθε  $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0, r)$ ,  $|\mu - \mu_0| \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0)\| \leq \delta$ . Συνεπώς, για κάθε  $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0, r)$ , ισχύει ότι

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| - |\mu - \mu_0| \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0)\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|P(\mu_0) + (\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|P(\mu) - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Δηλαδή, το  $\mu_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , το οποίο είναι άτοπο αφού  $\mu_0 \in \partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , από υπόθεση. Επομένως, το 0 είναι συνοριακό σημείο του  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu); B)$ .

(ii) Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι  $\mu_0 \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$ . Επομένως, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\mathcal{D}(\mu_0, \delta) \subset \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$ . Από τη σχέση (4.4.1) και την υπόθεση ότι  $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$ , υπάρχει ένας μιγαδικός  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  τέτοιος ώστε  $\|P'(\mu_0) - \lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1|$ . Επιλέγοντας κατάλληλα μικρό  $\delta$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε  $\mu$  στον κλειστό κυκλικό δακτύλιο  $\mathcal{D}(\mu_0, \delta, \delta/2) = \{\mu \in \mathbb{C} : \delta/2 \leq |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$ , ισχύει ότι

$$\|E(\mu, \mu_0)\| + \|P'(\mu_0) - \lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1|,$$

ή

$$\|(\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - (\mu - \mu_0)\lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| |\mu - \mu_0|.$$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε

$$\xi = \min_{\mu \in \mathcal{D}(\mu_0, \delta, \delta/2)} \left\{ |\mu - \mu_0| \left( \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\| \right) \right\} > 0.$$

Αφού όμως  $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$ , από την Πρόταση 3.7.7 (ii) έπεται ότι υπάρχει ένα  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|P(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| + \xi.$$

Έπεται λοιπόν ότι για κάθε  $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0, \delta, \delta/2)$ ,

$$\begin{aligned} & \|P(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| + \\ & + |\mu - \mu_0| \left( \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\| \right), \end{aligned}$$

ή

$$\|P(\mu) - (\lambda_0 + \lambda_1(\mu - \mu_0))B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| (|\lambda_0| + |\lambda_1(\mu - \mu_0)|).$$

Παρατηρούμε όμως ότι οι αριθμοί  $\lambda_0$  και  $\lambda_1$  δεν εξαρτώνται από το  $\mu$  και επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ένα  $\hat{\mu} \in \mathcal{D}(\mu_0, \delta, \delta/2)$  τέτοιο ώστε  $\arg(\lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0)) = \arg(\lambda_0)$ . Τότε έχουμε

$$\|P(\hat{\mu}) - (\lambda_0 + \lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0))B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0 + \lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0)|,$$

άρα  $\hat{\mu} \notin W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , το οποίο είναι άτοπο.  $\square$

Από τη σχέση (4.4.4), την Πρόταση 3.4.1 και το Θεώρημα 4.4.1 (i) προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 4.4.2.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στη σχέση (4.2.1),  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  μη μηδενικός πίνακας και  $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ . Τότε ισχύει  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B) \subseteq W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$  και για κάθε  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $P(\mu) \neq 0$ , έχουμε ότι το  $\mu$  ανήκει στο εσωτερικό του  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ .

Απόδειξη. Για κάθε  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$ ,  $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(\mu); B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(\mu); B)$  και επομένως,  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ . Επιπλέον, αν  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$  με  $P(\mu) \neq 0$ , τότε ο πίνακας  $P(\mu)$  δε μπορεί να είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του  $B$  και η Πρόταση 3.4.1 δίνει ότι το  $0$  ανήκει στο εσωτερικό του  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(\mu); B)$ . Επομένως, από το Θεώρημα 4.4.1 (i), το  $\mu$  είναι εσωτερικό σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ .  $\square$

**Πόρισμα 4.4.3.** Για κάθε  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  και  $q \in (0, 1]$ , έχουμε ότι

$$W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); bB) = W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); B)$$

και

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) = (\supseteq, \subseteq) W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q)$$

αν  $|b| = (>, <) 1$ .

Απόδειξη. Αφού η Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητα είναι ομογενής,

$$W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); bB) = \{\mu \in \mathbb{C} : bB \perp_{BJ}^{\epsilon} P(\mu)\} = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon} P(\mu)\}.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : bB \perp_{BJ}^{\epsilon} P(\mu), \epsilon = \frac{\sqrt{|b|^2 \|B\|^2 - q^2}}{|b| \|B\|} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon} P(\mu), \epsilon = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2/|b|^2}}{\|B\|} \right\}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται από την Πρόταση 4.4.2.  $\square$

**Πόρισμα 4.4.4.** Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  επάγεται από διανυσματική νόρμα και έστω  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  και  $y_0 \in \mathbb{C}^m$  δύο μοναδιαία διανύσματα τέτοια ώστε  $|x_0^* B y_0| = \|B\|$ . Τότε για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$ , το σύνολο Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); B)$  περιέχει όλες τις ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου  $x_0^* P(z) y_0 = x_0^* A_l y_0 z^l + \dots + x_0^* A_1 y_0 z + x_0^* A_0 y_0$ . Επιπλέον, για κάθε  $\mu \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $P(\mu) \neq 0$  και  $x_0^* P(\mu) y_0 = 0$ , ισχύει ότι  $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); B)]$  για κάθε  $\epsilon \in (0, 1)$ .

Απόδειξη. Έστω  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  μια ρίζα του μιγαδικού πολυωνύμου  $x_0^* P(z) y_0$ . Τότε για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\|P(\mu_0) - \lambda B\| \geq \|x_0^* [P(\mu_0) - \lambda B] y_0\| \geq \|B\| |\lambda|$ . Επομένως, το  $\mu_0$  ανήκει στο  $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B)$  και η Πρόταση 4.4.2 ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι κατά κάποιο τρόπο συμπληρωματικό της Πρότασης 4.4.2 και δίνει μια ικανή συνθήκη για την εμφάνιση μεμονομένων σημείων του  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); B)$ .

**Πρόταση 4.4.5.** Έστω  $P(z)$  ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας όπως στην σχέση (4.2.1), έστω  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  μη μηδενικός και  $0 \leq \epsilon < 1$ . Αν υπάρχει  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $P(\mu_0) = 0$  και  $0 \notin F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P'(\mu_0); B)$ , τότε το  $\mu_0$  είναι μεμονωμένο σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(P(z); B)$ .

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 (βλέπε τη σχέση (4.4.1)), έχουμε

$$P(z) = P(\mu_0) + (z - \mu_0)P'(\mu_0) + (z - \mu_0)E(z, \mu_0),$$

όπου  $P(\mu_0) = 0$  και  $\|E(z, \mu_0)\| = o(1)$  καθώς  $|z - \mu_0| \rightarrow 0$ . Αφού όμως από υπόθεση έχουμε ότι  $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$ , έπεται ότι υπάρχει ένα  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $\|P'(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|$  και επιλέγοντας ένα  $\delta > 0$  κατάλληλα μικρό, υποθέτουμε ότι για κάθε  $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0, \delta) \setminus \{\mu_0\}$ , ισχύει

$$\|E(\mu, \mu_0)\| + \|P'(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|,$$

ή

$$\|(\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - (\mu - \mu_0)\lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| |\mu - \mu_0|,$$

ή

$$\|P(\mu) - \lambda_0(\mu - \mu_0)B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0(\mu - \mu_0)|.$$

Συνεπώς,  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \cap \mathcal{D}(\mu_0, \delta) = \{\mu_0\}$ , άρα το  $\mu_0$  είναι μεμονωμένο σημείο του  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .  $\square$

Έστω τώρα ένας  $n \times m$  πολυωνυμικός πίνακας  $P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j$  όπως στην (4.2.1). Έστω επίσης μια νόρμα πίνακα  $\|\cdot\|$  για την οποία στο υπόλοιπο της παραγράφου θα θεωρούμε ότι επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων. Τότε από την (4.2.6) και το Λήμμα 1.3.1, έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp^\epsilon P(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|P(\mu)\|\}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που η νόρμα που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε το σύνολο Birkhof–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας πολυωνυμικού πίνακα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, έχουμε έναν εναλλακτικό ορισμό του συνόλου αυτού, ο οποίος δόθηκε από τη σχέση (4.4.2).

Συνεπώς, βάσει του ορισμού αυτού, έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle|^2 \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \|P(\mu)\|^2\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \langle P(\mu), B \rangle \langle B, P(\mu) \rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \langle P(\mu), P(\mu) \rangle\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, B \right\rangle \left\langle B, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\mu = u + iv$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ), η συνάρτηση

$$p_\epsilon(u, v) = \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle (u+iv)^i (u-iv)^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle (u+iv)^i (u-iv)^j$$

είναι ένα πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών  $u, v \in \mathbb{R}$ , συνολικού βαθμού  $2l$ , με πραγματικούς συντελεστές. Επομένως, το σύνορο  $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  ανήκει στην αλγεβρική καμπύλη

$$\{u + iv \in \mathbb{C} : p_\epsilon(u, v) = 0, u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Επιπλέον, για  $\epsilon = 0$ , από τη σχέση (4.4.2) προκύπτει ότι

$$W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{\mu \in \mathbb{C} : \langle A_l, B \rangle \mu^l + \cdots + \langle A_1, B \rangle \mu + \langle A_0, B \rangle = 0\}. \quad (4.4.3)$$

Συνεπώς, από την Πρόταση 4.4.2 έπεται το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο είναι παρόμοιο με το Πρόσμμα 4.4.4.

**Πόρισμα 4.4.6.** Για κάθε  $\epsilon \in [0, 1)$ , όλες οι ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου  $\langle P(z), B \rangle = \langle A_l, B \rangle z^l + \cdots + \langle A_1, B \rangle z + \langle A_0, B \rangle$  ανήκουν στο σύνολο Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ . Επιπλέον, για κάθε  $\mu \in \mathbb{C}$  για το οποίο ισχύει  $P(\mu) \neq 0$  και  $\langle P(\mu), B \rangle = 0$ , έχουμε ότι  $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$  για κάθε  $\epsilon \in (0, 1)$ .

Τα παραπάνω επιτρέπουν τη δημιουργία κενών συνόλων  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας πολυωνυμικών πινάκων. Συγκεκριμένα, αν  $\langle A_j, B \rangle = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) και  $\langle A_0, B \rangle \neq 0$ , τότε το πολυώνυμο  $\langle P(z), B \rangle = \langle A_0, B \rangle$  είναι σταθερό και μη μηδενικό. Συνεπώς, από τη σχέση (4.4.3),  $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \emptyset$ . Στην ειδική αυτή περίπτωση, μπορούμε επίσης να πούμε ότι  $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{\infty\}$ , αφού το σύνολο Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας του αλγεβρικά αντιστρόφου πολυωνυμικού πίνακα  $R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j$ ,  $W_{\|\cdot\|}^0(R(z); B) = \{\mu \in \mathbb{C} : \langle A_0, B \rangle \mu^l = 0\}$ , συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Αυτό είναι συμβατό με την Πρόταση 4.3.2, το Θεώρημα 4.3.6 και το γεγονός ότι για κάθε  $\epsilon \in (0, 1)$ , το χωρίο

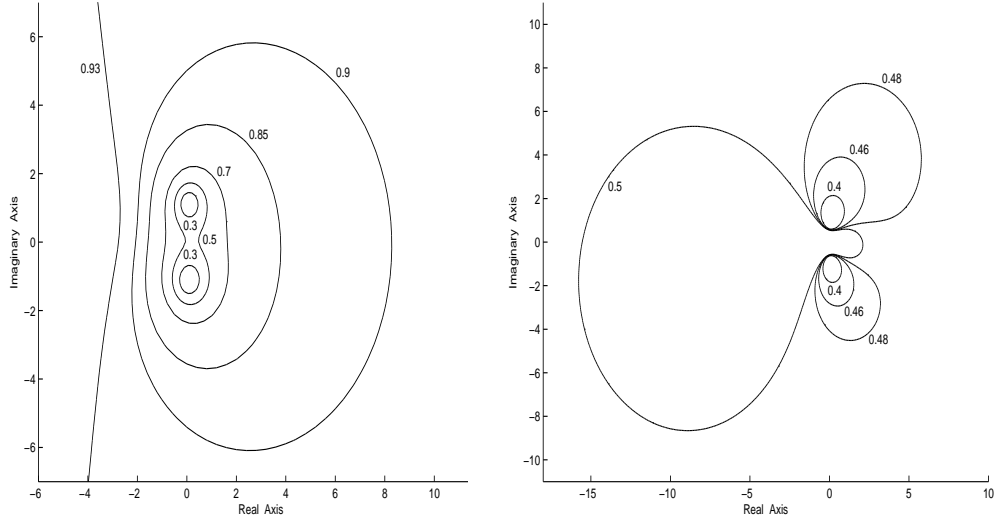
$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle A_0, B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|P(\mu)\|\}$$

είναι μη φραγμένο και περιέχει ένα σύνολο της μορφής  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$  για κάποιο πραγματικό αριθμό  $r > 0$ .

Στο επόμενο παράδειγμα θεωρούμε έναν  $3 \times 2$  πολυωνυμικό πίνακα δευτέρου βαθμού

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε επίσης τον αλγεβρικά αντίστροφο πολυωνυμικό πίνακα



Σχήμα 4.1: Τα σύνολα Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας του  $P(z)$  (αριστερά) και του  $R(z)$  (δεξιά).

$$R(z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

και τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.9 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Για τη νόρμα Frobenius, εφαρμόζοντας την σχέση (4.4.2), σχεδιάσαμε τα σύνολα των συνόλων  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$ ,  $\epsilon = 0.3, 0.5, 0.7, 0.85, 0.9, 0.93$  και  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$ ,  $\epsilon = 0.4, 0.46, 0.48, 0.5$ , στο αριστερό και στο δεξιό μέρος του Σχήματος 4.1, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το σύνολο  $W_{\|\cdot\|_F}^{0.5}(R(z); B)$  είναι το μιγαδικό επίπεδο εξαιρουμένου του λημνίσκου που περιέχει την αρχή των αξόνων. Τα σύνολα  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$  και  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$  γίνονται μη φραγμένα όταν  $\epsilon = 0.9288$  και  $\epsilon = 0.4928$ , αντίστοιχα και η αρχή των αξόνων μπαίνει στα σύνολα Birkhoff–James  $\epsilon$ -ορθογωνιότητας των αντίστοιχων μεγιστοβάθμιων συντελεστών, επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 4.3.6. Οι Προτάσεις 4.3.2, 4.3.7 και 4.4.2 προφανώς επιβεβαιώνονται και αυτές. Επιπλέον, οι ρίζες  $0.0843 \pm i1.1216$  του πολυωνύμου  $\langle P(z), B \rangle = 1.66z^2 - 0.28z + 2.1$  ανήκουν στο σύνολο  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$  και οι ρίζες  $0.0667 \pm i0.8866$  του πολυωνύμου  $\langle R(z), B \rangle = 2.1z^2 - 0.28z + 1.66$  ανήκουν στο  $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$ , επιβεβαιώνοντας το Πρόγραμμα 4.4.6.

# Βιβλιογραφία

- [1] A. Abdollahi, The polynomial numerical hull of a matrix and algorithms for computing the numerical range, *Appl. Math. Comput.*, **180** (2006) 635–640.
- [2] A. Aretaki and I. Maroulas, Investigating the numerical range and  $q$ -numerical range of nonsquare matrices, *Opuscula Math.*, υπό δημοσίευση (2011).
- [3] M.V. Balashov, Geometric difference of multivalued sets, *Mathematical Notes*, **70** (2001) 147–153.
- [4] C.A. Beattie, M. Embree and D.C. Sorensen, Convergence of polynomial restart Krylov methods for eigenvalue computations, *SIAM Rev.*, **47** (2003) 492–515.
- [5] R. Bhatia and P. Šemrl, Orthogonality of matrices and some distance problems, *Linear Algebra Appl.*, **287** (1999) 77–85.
- [6] D. Boley, Estimating the sensitivity of the algebraic structure of pencils with simple eigenvalue estimates, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **11** (1990) 632–643.
- [7] G. Boutry, M. Elad, G.H. Golub and P. Milanfar, The generalized eigenvalue problem for nonsquare pencils using a minimal perturbation approach, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **27** (2005) 582–601.
- [8] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, 1971.
- [9] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, New York, 1973.
- [10] R. Carden, A simple algorithm for the inverse field of values problem, *Inverse Problems*, **25** (2009) 115019.
- [11] S. H. Cheng and N. Higham, The nearest definite pair for the hermitian eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, **302/303** (1999), 63–76.
- [12] J. Chmielinski, On an  $\varepsilon$ -Birkhoff orthogonality, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, **6** (2005), Article 79.
- [13] C. Davis, The Toeplitz-Hausdorff Theorem explained, *Canad. Math. Bull.*, **14** (1971) 245–246.



- [14] S.S. Dragomir, On approximation of continuous linear functionals in normed linear spaces, *An. Univ. Timisoara Ser. Stiint. Mat.*, **29** (1991), 51–58.
- [15] M. Eiermann, Field of values and iterative methods, *Linear Algebra Appl.*, **180** (1993) 167–197.
- [16] M. Embree and L.N. Trefethen, Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators, Princeton University Press, 2005.
- [17] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982
- [18] M. Goldberg and E. Tadmor, On the numerical radius and its applications *Linear Algebra Appl.*, **42** (1982) 263–284.
- [19] A. Greenbaum, Generalizations of the field of values useful in the study of polynomial functions of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, **347** (2002) 233–249.
- [20] K.E. Gustafson and D.K.M. Rao, *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [21] D.W. Hadwin, K.J. Harrison and J.A. Ward, Numerical ranges and matrix completions, *Linear Algebra Appl.*, **315** (2000) 145–154.
- [22] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [23] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Z.*, **3** (1919) 314–316.
- [24] N.J. Higham, F. Tisseur and P.M. van Dooren, Detecting a definite hermitian pair and a hyperbolic or elliptic quadratic eigenvalue problem, and associated nearness problems, *Linear Algebra Appl.*, **351/352** (2002) 455–474.
- [25] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [26] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [27] R.C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947) 265–292.
- [28] C.R. Johnson, Numerical determination of the field of values of a general complex matrix, *Linear Algebra Appl.*, **15** (1978) 595–602.
- [29] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [30] P. Lancaster and P. Psarrakos, Normal and seminormal eigenvalues of analytic matrix functions, *Integral Equations Operator Theory*, Birkhauser, **41** (2001) 331–342.

- [31] H. Langer, A. Markus and C. Tretter, Corners of numerical ranges, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **124** (2001) 385–400
- [32] H.W.J. Lenferink and M.N. Spijker, On generalization of the numerical range of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, **140** (1990) 251–266.
- [33] C.-K. Li, A simple proof of the elliptical range theorem, *Proceed. American Math. Society*, **124** (1996) 1985–1986.
- [34] C.-K. Li and H. Nakazato, Some results on the  $q$ -numerical range, *Linear and Multilinear Algebra*, **43** (1998) 385–409
- [35] C.-K. Li, P.P. Mehta and L. Rodman, A generalized numerical range: The range of a constrained sesquilinear form, *Linear and Multilinear Algebra*, **37** (1994) 25–49
- [36] C.-K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15** (1994) 1256–1265.
- [37] G. Lumer, Semi-inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961) 29–43.
- [38] J. Maroulas and P. Psarrakos, On the connectedness of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.*, **280** (1998) 97–108.
- [39] J. Maroulas and P. Psarrakos, The boundary of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.*, **267** (1997) 101–111.
- [40] C. Mehl and C. Trunk, Normal matrices in degenerate indefinite inner product spaces, *Operator theory: Advances and Appl.*, **175** (2007) 193–209.
- [41] C. Mehl and L. Rodman, Classes of normal matrices in indefinite inner products, *Linear Algebra Appl.*, **336** (2001) 71–98.
- [42] E. Mengi and M. Overton, Algorithms for the computation of the pseudospectral radius and the numerical radius of a matrix, *IMA J. Num. Anal.*, **25** (2005) 648–669.
- [43] H. Nakazato and P. Psarrakos, On the shape of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.*, **338** (2001) 105–123
- [44] E.S. Polovinkin, *Elements of the theory of many-valued mappings*, Izdat. Moskov. Fiz. Tekh. Inst., Moscow, 1982 (στη Ρωσική).
- [45] P. Psarrakos, Numerical range of linear pencils, *Linear Algebra Appl.*, **317** (2001) 127–142
- [46] J.G. Stamfli and J.P. Williams, Growth condition and the numerical range in a Banach algebra, *Tohoku Math. Journ.*, **20** (1968) 417–424.

- [47] G.W. Stewart, Perturbation theory for rectangular matrix pencils, *Linear Algebra Appl.*, **208/209** (1994) 297–301.
- [48] G.W. Stewart and J.-Q. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, 1991.
- [49] G.L. Thompson and R.L. Weil, The roots of matrix pencils ( $Ay = \lambda By$ ): Existence, calculations, and relations to game theory, *Linear Algebra Appl.*, **5** (1972) 207–226.
- [50] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Z.*, **2** (1918) 187–197.
- [51] F. Uhlig, An inverse field of values problem, *Inverse Problems*, **25** (2008) 055019.
- [52] F. Uhlig, On computing the generalized Crawford number of a matrix, *submitted*.
- [53] F. Uhlig, MATLAB m-file `Craw2circ.m`, (2010), available at [http://www.auburn.edu/~uhligfd/m\\_files/Craw2circ.m](http://www.auburn.edu/~uhligfd/m_files/Craw2circ.m).
- [54] G.A. Watson, Computing the numerical radius, *Linear Algebra Appl.*, **234** (1996) 163–172

## Παράρτημα: Περίληψη στην Αγγλική

### English Summary

#### 1. Introduction

In this thesis, we try to generalize the notion of the numerical range (also known as field of values) of a square matrix, to that of a numerical range for rectangular matrices.

For a matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , the numerical range of  $A$  is the set

$$F(A) = \{x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

The numerical range of a square matrix (or an operator) and its related notions, have been a topic of extended research for the last ninety years, especially since the celebrated Toeplitz-Hausdorff theorem was obtained, in 1918 [23, 50]. Some of its basic properties are given below:

**Proposition 1.** *If  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , then*

- $F(A)$  is a convex and compact subset of  $\mathbb{C}$ ,
- $F(aA + bI_n) = aF(A) + b$ , for any  $a, b \in \mathbb{C}$ , where  $I_n$  is the  $n \times n$  identity matrix,
- $F(H(A)) = \text{Re}\{F(A)\}$  and  $F(S(A)) = \text{Im}\{F(A)\}$ , where

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{and} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2},$$

- $\sigma(A) \subseteq F(A)$ , where  $\sigma(A)$  is the spectrum of  $A$ ,
- $F(A + B) \subseteq F(A) + F(B)$ , for any  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,
- $F(U^* A U) = F(A)$ , for any unitary  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,
- $F(\hat{A}) \subseteq F(A)$ , for any principal submatrix  $\hat{A}$  of  $A$ ,

- $F(A) = \text{Co}\{\sigma(A)\}$ , when  $A$  is normal,
- If  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , then  $F(A \oplus B) = \text{Co}\{F(A) \cup F(B)\}$
- the following are equivalent:
  - (i)  $\text{Re}\{x_0^* A x_0\} = \max\{\text{Re}\{a\} : a \in F(A)\}$ ,
  - (ii)  $x_0^* H(A) x_0 = \max\{h : h \in F(H(A))\}$ ,
  - (iii)  $H(A) x_0 = \lambda_{\max}(H(A))$ ,
- Every corner  $\lambda_0$  of  $\partial F(A)$  is an eigenvalue of  $A$ ,
- $F(A) = \text{Co}\{\sigma(A)\}$  if and only if  $A$  is normal or unitarily similar to a matrix of the form  $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ , where  $A_1$  is normal and  $F(A_2) \subset F(A_1)$ .

Stampfli and Williams [46], and later Bonsall and Duncan [9], proved that the numerical range can be expressed as an intersection of closed discs, in the form

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

This definition of the numerical range which is based only on the norm and not on the inner product, will be our main tool in our effort to expand this topic to the case of rectangular matrices.

## 2. An Inverse Problem for the Numerical Range

Let  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Given a point  $\mu \in F(A)$ , we call a unit vector  $x_\mu \in \mathbb{C}^n$  with  $\mu = x_\mu^* A x_\mu$ , a *generating vector* for  $\mu$ . In 2008, Uhlig [51] posed the inverse numerical range (field of values) problem: *given an interior point  $\mu$  of  $F(A)$ , determine a generating vector  $x_\mu$  of  $\mu$* . Uhlig also proposed an algorithm for solving this inverse problem [51], and so did Carden [10] in 2009. Here we propose a new algorithm for solving this problem, which is based on the most trivial properties of the field of values. First, we present the following proposition [26] that will be needed in the sequel.

**Proposition 2.** *Let  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be a matrix whose numerical range  $F(A)$  is not a singleton, and let  $a$  and  $c$  be two real axis points of  $F(A)$  with  $a < 0 < c$ . Suppose that  $x_a, x_c \in \mathbb{C}^n$  are two unit vectors that generate  $x_a^* A x_a = a$  and  $x_c^* A x_c = c$ .*

( $\alpha$ ) *For  $x(t, \vartheta) = e^{i\vartheta} x_a + t x_c \in \mathbb{C}^n$ ,  $\alpha(\vartheta) = e^{-i\vartheta} x_a^* A x_c + e^{i\vartheta} x_c^* A x_a$  and  $t, \vartheta \in \mathbb{R}$ , we have  $x(t, \vartheta)^* A x(t, \vartheta) = c t^2 + \alpha(\vartheta) t + a$  and  $\alpha(-\vartheta) \in \mathbb{R}$  when  $\vartheta = \arg(x_c^* A x_a - x_a^T \overline{A} x_c)$ .*

(b) *For  $t_1 = \left(-\alpha(-\varphi) + \sqrt{\alpha(-\varphi)^2 - 4ac}\right)/(2c)$ , we have*

$$x(t_1, -\varphi) \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{x(t_1, -\varphi)^*}{\|x(t_1, -\varphi)\|_2} A \frac{x(t_1, -\varphi)}{\|x(t_1, -\varphi)\|_2} = 0.$$

For  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  and  $\mu$  an interior point of  $F(A)$ , we replace the problem of finding a unit vector  $x \in \mathbb{C}^n$  with  $x^*Ax = \mu$  ( $= x^*\mu I_n x$ ) with the equivalent problem

$$x^*(A - \mu I_n)x = 0.$$

Thus, without loss of generality, we assume that  $\mu = 0$  and look for a unit vector  $x_0$  such that  $x_0^*Ax_0 = 0$ ; i.e., we simply replace  $A$  by  $A - \mu I_n$  if  $\mu \neq 0$ .

First, we construct up to four  $\partial F(A)$  points  $p_i$  and their generating unit vectors  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), by computing the extreme eigenvalues with associated unit eigenvectors  $x_i$  for  $H(A) = (A + A^*)/2$  and  $K(A) = (A - A^*)/2$ . By setting  $p_i = x_i^*Ax_i$ , we obtain four  $F(A)$  points  $p_i$  that mark the extreme horizontal and vertical extensions of  $F(A)$ . These we denote by  $rM$  and  $rm$  for the maximal and minimal horizontal extension  $F(A)$  points, respectively, and likewise by  $iM$  and  $im$  for the extreme vertical  $F(A)$  points. If any one of these lies within  $10^{-13}$  of zero in absolute terms, then we accept the corresponding unit vector as the desired generating vector. If, on the other hand, one of the hermitian matrices  $H(A)$  and  $K(A)$  is found to be definite during the eigenanalyses, then we stop knowing that  $\mu \notin F(A)$ .

Next we determine the real axis intersections of the great circle ellipses that pass through each feasible pair of our computed  $\partial F(A)$  points  $p_i = x_i^*Ax_i$ ,  $p_j = y_j^*Ay_j$ . Here, a feasible pair refers to their imaginary parts having opposite signs. If among these there are real axis points on both sides of zero, then we compute a generating unit vector for  $0 \in F(A)$  by using Proposition 2, and the inverse problem is solved. Otherwise, we study the quadratic expression whose zeros determine the coordinate axes  $F(A)$  points on the ellipses through the points  $x^*Ax, y^*Ay \in \partial F(A)$  and that are generated by the points in  $\mathbb{C}^n$  on the great circle through  $x$  and  $y$ . It is

$$\begin{aligned} (tx + (1-t)y)^*A(tx + (1-t)y) &= (x^*Ax + y^*Ay - (x^*Ay + y^*Ax))t^2 \\ &+ (-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay. \end{aligned}$$

This is a quadratic polynomial equation over the complex numbers, and we are interested only in the solutions whose imaginary parts are equal to zero in order to apply Proposition 2 if possible. Setting the imaginary part of the above expression equal to zero, leads to the following polynomial equation with real coefficients:

$$t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0$$

for  $q = \text{Im}\{x^*Ax\}$ ,  $p = \text{Im}\{y^*Ay\}$  and  $r = \text{Im}\{x^*Ay + y^*Ax\}$ , so that  $f = p + q - r$  and  $g = (r - 2p)/f$ . The last equation has two real solutions  $t_i$ ,  $i = 1, 2$ , and these supply two generating vectors  $x_i = t_i x + (1 - t_i)y$  ( $i = 1, 2$ ) for two real axis points. Normalization then gives two unit vector generators as desired.

If none of the feasible ellipses gives us two real axis numerical range points to either side of zero initially, then we check whether their collective set does.

If not, we compute more eigenanalyses for  $A(\theta) = \cos(\theta) H(A) + \sin(\theta) i K(A)$  with angles  $\theta$  other than  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi/2$  as done at start-up with  $H(A)$  and  $i K(A)$ , respectively. If, for example, all original ellipses intersect the real axis to the right of zero and  $\text{Im}\{rm\} < 0$ , then we bisect the third quadrant and compute the largest eigenvalue and associated eigenvector  $x_{new}$  of  $A(3\pi/4)$  to find a  $\partial F(A)$  point that lies between  $iM$  and  $rm$ . If this point lies below the real axis, then we check the ellipse intersections of the great circle images through the generating vector of  $iM$  and  $x_{new}$ , otherwise we do the same for the generator of  $rm$  and  $x_{new}$ . Thus, we proceed by angle bisection until we encounter a definite matrix  $A(\theta)$  indicating that  $\mu \notin F(A)$ , or an ellipse that intersects the real axis to the left of zero and we can solve the inverse problem by using Proposition 2. The number of iterations by angle bisection has generally been low, normally below 4 and possibly up into the teens only when zero lies within  $10^{-13}$  of the boundary  $\partial F(A)$  in absolute terms.

### 3. Birkhoff–James $\epsilon$ –Orthogonality Sets

In the introduction, we have seen an alternative definition for the numerical range of a square matrix which is only based on the norm  $\|\cdot\|_2$ . That is,

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Motivated by this, we introduce a numerical range for rectangular matrices, whose definition is again solely based on the notion of a matrix norm  $\|\cdot\|$  rather than that of the inner product.

**Definition 1.** Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  and  $\|\cdot\|$  a matrix norm. We define *the numerical range of the matrix  $A$  with respect to the matrix  $B$*  to be the set

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}(\lambda, \|A - \lambda B\|), \end{aligned}$$

where  $\mathcal{D}(\lambda, \rho)$  denotes the (circular) closed disc centered at  $\lambda$  and with radius  $\rho \geq 0$ .

For the remainder it is necessary to recall that, for two elements  $u$  and  $v$  of a (complex) normed linear space,  $u$  is said to be *Birkhoff–James orthogonal* to  $v$ , denoted by  $u \perp_{BJ} v$ , if  $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$  for all  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Furthermore,  $u$  is said to be *Birkhoff–James  $\epsilon$ –orthogonal* to  $v$ , denoted by  $u \perp_{BJ}^\epsilon v$ , if  $\|u + \lambda v\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|u\|$  for all  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Theorem 3.** Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , with  $\|B\| = 1$ . Then it holds,

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\}.$$

**Corollary 4.** For any  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$  is nonempty if and only if  $\|B\| \geq 1$ .

It must be noted that  $F_{\|\cdot\|}(A; B)$  is always compact and convex, when it is non-empty, as an infinite intersection of closed discs. A question that could easily arise concerns the use of the matrix  $B$  in the definition above instead of a “generalized” form of the identity matrix, say  $I_{n,m} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ . Note that without loss of generality we have assumed that  $n > m$ . In order to present an answer that will suffice for the question posed, we have the following three results.

**Proposition 5.** For any  $n \times m$  ( $n > m$ ) matrix  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  with  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  and  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ , it holds that

$$F(A_1) = \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]).$$

**Proposition 6.** Let  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  with  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  and  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ . If  $\mu \in F(A_1)$ , then

$$F(A_1) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} F\left(\begin{bmatrix} A_1 & e^{i\theta} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}\right).$$

**Theorem 7.** For any  $n \times m$  ( $n > m$ ) matrix  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  with  $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  and  $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ , it holds that  $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) = F(A_1)$ .

So, the use of  $I_{n,m}$  in the definition gives us the field of values of a principal submatrix of  $A$ , which is a trivial and not interesting case.

As mentioned above,  $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\}$ . But what happens when  $\|B\| > 1$ ? One can easily verify that for  $\epsilon = \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$ , we have

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - (\mu - \lambda)B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\lambda(A - \mu B) + B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_B^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_B} (A - \mu B)\}. \end{aligned}$$

**Definition 2.** Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  with  $B \neq 0$ ,  $\|\cdot\|$  a matrix norm and  $\epsilon \in [0, 1)$ . The *Birkhoff–James  $\epsilon$ -orthogonality set* of the matrix  $A$  with respect to the



matrix  $B$ , is defined to be the set

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon (A - \mu B)\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D} \left( \lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right). \end{aligned}$$

For this new, convex and compact set, we have proven the following results and properties.

**Proposition 8.** *Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  with  $B \neq 0$ , and  $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ . If the matrix  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ , then  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$ , and in particular,  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$  lies in the interior of  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$ .*

**Corollary 9.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$  and  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ . Then for every  $\epsilon \in (0, 1)$ , the  $\epsilon$ -orthogonality set  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$  has a nonempty interior, and it cannot be degenerated to a singleton or a line segment.*

**Proposition 10.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$  and  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ . Then for any bounded region  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , there is an  $\epsilon_\Omega \in [0, 1)$  such that  $\Omega \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(A; B)$ .*

**Proposition 11.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$ . If  $A = bB$  for some  $b \in \mathbb{C}$ , then  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\}$ . The converse is not true in general; for example, if the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by an inner product of matrices, then  $F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$  is always a singleton (see Proposition 16 below).*

**Proposition 12.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$ . For any scalars  $a, b \in \mathbb{C}$ , it holds that  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(aA + bB; B) = aF_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + b$ .*

**Proposition 13.** *If  $A \neq 0$ , then*

$$\{\mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), |\mu| \geq \|A\|/\|B\|\} \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(B; A).$$

**Proposition 14.** *It holds that*

$$\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)] \subseteq \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

where  $\text{Int}[\cdot]$  denotes the interior of a set.

**Proposition 15.** *Suppose that  $f : (\mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}^{n_2 \times m_2}, \|\cdot\|)$  is a linear map such that  $\|f(M)\| = (\geq, \leq) \|M\|$  for every  $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ . Then for any  $A, B \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ ,  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(f(A); f(B)) = (\geq, \leq) F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .*

**Proposition 16.** *If the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by the inner product of matrices  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (this is the case of the Frobenius norm  $\|\cdot\|_F$ ), then*

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \mathcal{D} \left( \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Recall that the Hausdorff metric  $\rho_H$ , between two compact sets  $\Omega_1, \Omega_2$  is

$$\rho_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max \left\{ \max_{a \in \Omega_1} \min_{b \in \Omega_2} d(a, b), \max_{b \in \Omega_2} \min_{a \in \Omega_1} d(a, b) \right\}.$$

**Lemma 17.** *Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  and the matrix  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ . Then for every  $\delta > 0$  there are  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  such that*

$$\rho_H \left( \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D} \left( \lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) \right) \leq \delta.$$

**Proposition 18.** *Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  and the matrix  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ . Then the mapping*

$$A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$$

*is upper semi-continuous with respect to the Hausdorff metric.*

**Proposition 19.** *Let  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  and the matrix  $A$  is not a scalar multiple of  $B$ . Then the mapping*

$$\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B),$$

*for  $\epsilon \in [0, 1)$ , is continuous with respect to the Hausdorff metric.*

**Proposition 20.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$ . Suppose the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm (acting on  $\mathbb{C}^n$  and  $\mathbb{C}^m$ ) and  $n \geq m$ , and let  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  be an eigenvalue of  $A$  with respect to  $B$ , with an associate unit eigenvector  $x_0 \in \mathbb{C}^m$ ; that is,  $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$ . Then for every  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ ,  $\mu_0$  lies in  $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ .*

**Corollary 21.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$  and  $B$  is invertible. Suppose that the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm (acting on  $\mathbb{C}^n$  and  $\mathbb{C}^m$ ) and  $n \geq m$ . of  $A$  with respect to  $B$ . If  $\|B\| \geq 1$  and  $\|B^{-1}\| \leq 1$ , then all the eigenvalues of  $A$  with respect to  $B$  belong to  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$*

If the matrix  $B$  is invertible then an eigenvalue of  $A$  with respect to  $B$  is said to be a normal eigenvalue if it is a normal eigenvalue of the matrix  $B^{-1}A$ .

**Corollary 22.** *Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$  and  $B$  is invertible. Let  $\mu$  be an eigenvalue of  $A$  with respect to  $B$  such that  $\mu \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$ . If  $\|B^{-1}\| \leq 1$  then,  $\mu$  is a normal eigenvalue of  $A$  with respect to  $B$ .*

**Corollary 23.** Suppose  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  such that  $B \neq 0$ , the matrix  $A$  is not a scalar multiple of  $B$  and  $\epsilon \in [0, 1)$ . Let  $\mu$  be an eigenvalue of  $A$  with respect to  $B$  such that  $\mu \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\epsilon B}(A; B)$ . Then for every unit eigenvector  $x_0 \in \mathbb{C}^m$  of  $\mu$ , it holds that

$$\epsilon \in \left[0, \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|\right].$$

**Proposition 24.** Suppose the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm. Let  $\epsilon \in [0, 1)$ , and let  $A, B$  be two  $n \times n$  matrices with  $B$  invertible and  $\|B^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ . Then for any point  $\xi \notin F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ , the distance  $d(\xi, F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B))$  from  $\xi$  to  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  satisfies

$$d(\xi, F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \|(A - \xi B)^{-1}\|}.$$

**Proposition 25.** Let  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  with  $B \neq 0$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$ , and  $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ .

(i) The point  $\mu_0$  lies on the boundary  $\partial F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  if and only if

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

(ii) If  $\epsilon > 0$ , then  $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  if and only if

$$\min_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0,$$

i.e., if and only if there is a  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  such that

$$\|A - \lambda_0 B\| = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_0|.$$

**Corollary 26.** If  $\epsilon \in (0, 1)$ , then the boundary  $\partial F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$  does not have any flat portions

Suppose that the matrices  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ) are diagonal, i.e., all their off-diagonal entries are zero, and denote  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  and  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ . Assume also that all the diagonal entries of  $B$  are nonzero. Then the ratios  $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_m/b_m$  are the eigenvalues of  $A$  with respect to  $B$ , with corresponding eigenvectors the vectors of the standard basis of  $\mathbb{C}^m$ .

**Corollary 27.** Let  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  and  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  be  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) diagonal matrices with  $b_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Then every eigenvalue  $a_i/b_i \in \sigma(A; B)$  with  $|b_i| \geq 1$  lies in  $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon B}(A; B)$ .

**Proposition 28.** Denote by  $\|\cdot\|_d$  a matrix norm such that for any  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) diagonal matrix  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ ,  $\|D\|_d = \max\{|d_j| : j = 1, 2, \dots, m\}$ . Let  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  and  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  be two  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) diagonal matrices. If  $|b_1| = |b_2| = \dots = |b_m| = 1$ , then the numerical range  $F_{\|\cdot\|_d}(A; B)$  coincides with the convex hull of the eigenvalues of  $A$  with respect to  $B$ ,  $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_m/b_m$ .

#### 4. Birkhoff–James $\epsilon$ –Orthogonality Sets of Matrix Polynomials

Consider an  $n \times m$  matrix polynomial

$$P(z) = A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \dots + A_1 z + A_0,$$

where  $z$  is a complex variable and  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times m}$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ), with  $A_l \neq 0$ . If  $n \geq m$ , then a scalar  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  is said to be an *eigenvalue* of  $P(z)$ , if  $P(\mu_0)x_0 = 0$  for some nonzero vector  $x_0 \in \mathbb{C}^m$ . This vector  $x_0$  is called an *eigenvector* of  $P(z)$  corresponding to  $\mu_0$ .

We expand the notion of the Birkhoff–James  $\epsilon$ –orthogonality sets to that of the *Birkhoff–James  $\epsilon$ –orthogonality sets of matrix polynomials*.

**Definition 3.** The Birkhoff–James  $\epsilon$ –orthogonality set of  $P(z)$  with respect to  $B$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ) is

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu); B)\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu)\}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

For this set of matrix polynomials we have proven the following.

**Proposition 29.** *The following hold:*

- (i) For any scalar  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ ,  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B) = \alpha^{-1} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  and  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) - \alpha$ .
- (ii) If  $R(z) = A_0 z^l + \dots + A_{l-1} z + A_l = z^l P(z^{-1})$  is the reverse matrix polynomial of  $P(z)$ , then  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\} = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\} \right\}$ .
- (iii) If the norm  $\|\cdot\|$  is invariant under the conjugate operation  $\bar{\cdot}$ , and the coefficients of  $P(z)$  and  $B$  are all real matrices, then  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  is symmetric with respect to the real axis.
- (iv) Suppose the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm. If there exist two unit vectors  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  and  $y_0 \in \mathbb{C}^m$  such that  $|x_0^* B y_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$ , and  $x_0^* A_j y_0 = 0$  for every  $j = 0, 1, \dots, l$ , then  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \mathbb{C}$ .

**Proposition 30.** Suppose the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm and  $n \geq m$ , and let  $\mu_0$  be an eigenvalue of  $P(z)$  with an associated unit eigenvector  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ . Then for every  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1 \right)$ ,  $\mu_0$  lies in  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

**Theorem 31.** Let  $P(z)$  be an  $n \times m$  matrix polynomial,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  be nonzero and  $\epsilon \in [0, 1)$ .

- (i) If  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  is unbounded, then  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ .
- (ii) Suppose  $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$  and  $0$  is not an isolated point of  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$ , where  $R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j = z^l P(z^{-1})$ . Then the  $\epsilon$ -orthogonality set  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  is unbounded.

**Proposition 32.** Let  $P(z)$  be an  $n \times m$  matrix polynomial,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  be nonzero, and  $\epsilon \in [0, 1)$ . Suppose also that  $\Omega \subset \mathbb{C}$  is a compact region such that that for every  $\mu \in \Omega$ ,  $P(\mu)$  is not a nonzero scalar multiple of  $B$ . Then there is an  $\epsilon_\Omega \in [0, 1)$  such that  $\Omega \subseteq W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(P(z); B)$ .

**Proposition 33.** Suppose  $\mu_0 \in W(P(z))$ , and let  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  such that  $\|x_0\|_2 = 1$  and  $x_0^* P(\mu_0) x_0 = 0$ . Then for every  $\epsilon \in \left[ \sqrt{\|B\|_2^2 - |x_0^* B x_0|^2} / \|B\|_2, 1 \right)$ ,  $\mu_0$  lies in  $W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$ .

**Corollary 34.** For every  $\epsilon \in [0, 1)$  such that the interior of disk  $\mathcal{D}(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2)$  has an empty intersection with the standard numerical range  $F(B)$ , it holds that  $W(P(z)) \subseteq W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$ .

**Theorem 35.** Suppose  $P(z)$  is an  $n \times m$  matrix polynomial,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  is nonzero,  $\epsilon \in [0, 1)$  and  $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

- (i) If  $\mu_0 \in \partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ , then  $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$ .
- (ii) If  $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B) \setminus F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$  and  $P(\mu_0) \neq 0$ , then  $\mu_0$  lies on the boundary  $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .

**Proposition 36.** Let  $P(z)$  be an  $n \times m$  matrix polynomial,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  be nonzero, and  $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ . Then  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B) \subseteq W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ , and for any  $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$  such that  $P(\mu) \neq 0$ ,  $\mu$  lies in the interior of  $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ .

**Corollary 37.** Suppose the matrix norm  $\|\cdot\|$  is induced by a vector norm, and let  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  and  $y_0 \in \mathbb{C}^m$  be two unit vectors such that  $|x_0^* B y_0| = \|B\|$ . Then for any  $\epsilon \in [0, 1)$ , the Birkhoff-James  $\epsilon$ -orthogonality set  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  contains all zeros of the scalar polynomial  $x_0^* P(z) y_0 = x_0^* A_l y_0 z^l + \cdots + x_0^* A_1 y_0 z + x_0^* A_0 y_0$ . Moreover, for any  $\mu \in \mathbb{C}$  such that  $P(\mu) \neq 0$  and  $x_0^* P(\mu) y_0 = 0$ , it holds that  $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$  for every  $\epsilon \in (0, 1)$ .

**Proposition 38.** *Let  $P(z)$  be an  $n \times m$  matrix polynomial,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  be nonzero, and  $0 \leq \epsilon < 1$ . If there is a  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  such that  $P(\mu_0) = 0$  and  $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$ , then  $\mu_0$  is an isolated point of  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ .*

In the case that the norm that we use in the definition of the Birkhoff–James  $\epsilon$ –orthogonality sets of matrix polynomials is induced by an inner product of matrices, we have that

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|P(\mu)\|\}. \end{aligned}$$

As a consequence,

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle|^2 \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \|P(\mu)\|^2\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \langle P(\mu), B \rangle \langle B, P(\mu) \rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \langle P(\mu), P(\mu) \rangle\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, B \right\rangle \left\langle B, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Writing  $\mu = u + iv$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ), the function

$$p_\epsilon(u, v) = \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle (u+iv)^i (u-iv)^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle (u+iv)^i (u-iv)^j$$

is a scalar polynomial in  $u, v \in \mathbb{R}$  of total degree  $2l$ , with real coefficients. Thus, the boundary  $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$  lies on the algebraic curve

$$\{u + iv \in \mathbb{C} : p_\epsilon(u, v) = 0, u, v \in \mathbb{R}\}.$$

**Corollary 39.** *For any  $\epsilon \in [0, 1)$ , all zeros of the scalar polynomial  $\langle P(z), B \rangle = \langle A_l, B \rangle z^l + \cdots + \langle A_1, B \rangle z + \langle A_0, B \rangle$  lie in the  $\epsilon$ –orthogonality set  $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ . Moreover, for any  $\mu \in \mathbb{C}$  such that  $P(\mu) \neq 0$  and  $\langle P(\mu), B \rangle = 0$ , it holds that  $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$  for every  $\epsilon \in (0, 1)$ .*